

Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
7. Übungsblatt (20.5.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 27.5.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 7.1. Sei V ein *or.* gerade-dimensionaler euklidischer Vektorraum.

- a) Nach der Klassifikation der Clifford-Moduln sind $\mathbf{Cl}(V)$ und $\Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$ als (ungraduierte) $\mathbf{Cl}(V)$ -Moduln aus Dimensionsgründen isomorph. Zeigen Sie unabhängig davon explizit, dass die Symbol-Abbildung $\mathbf{Cl}(V)$, $\Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$ als $\mathbf{Cl}(V)$ -Moduln identifiziert. Benutzen Sie dies, um $\hat{\mathbf{S}} \otimes \hat{\mathbf{S}}^*$ als $\mathbf{Cl}(V)$ -Modul mit trivialer Operation auf $\hat{\mathbf{S}}^*$ mit $\Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$ zu identifizieren.
- b) Eine Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{End } E$ einer Gruppe G induziert kanonisch eine Darstellung $G \rightarrow \text{End } E^*$ über $g \mapsto (\alpha \mapsto \alpha \circ \rho(g^{-1}))$. Finden Sie für einen $\mathbf{Cl}(V)$ -Modul E eine kanonische Fortsetzung dieser Operation von $\mathbf{Spin}(V)$ auf E^* zu einem $\mathbf{Cl}(V)$ -Modul.
- c) Überprüfen Sie $\hat{\mathbf{S}}^* \cong \hat{\mathbf{S}}$ als \mathbf{Cl} -Modul.
- d) Welche Graduierung auf $\hat{\mathbf{S}}^*$ induziert die kanonische $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -Graduierung auf $\Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$?
(20+10+10+10 Punkte)

Übung 7.2. Fassen Sie die Spinor-Darstellung als reellen Vektorraum auf (mit $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$), auf dem $\mathbf{Cl}(V)$ mit V reell gerade-dimensional operiert.

- a) Sei $N = 2^{n+1}k - 1$ mit $N, n, k \in \mathbf{N}_0$. Folgern Sie, dass es auf der Sphäre S^N mindestens $2n$ punktweise linear unabhängige Vektorfelder gibt.
- b) Wieviele finden Sie mit der Methode aus Teil (a) auf Sphären der Dimension $N < 16$?
(25+25 Punkte)

(Tatsächlich gibt es noch ein wenig mehr, da die reelle Darstellungstheorie von Cliffordalgebren noch etwas komplizierter ist; für $N = 3, 7, 15$ gibt es 3, 7, 8 Vektorfelder).

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html>