Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
8. Übungsblatt (27.5.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 3.6.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 8.1. *Sei V ein orientierter $2n$-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie für alle $g \in \mathbf{Spin}(V)$*

$$\operatorname{Tr}_s g = \pm i^{-n} \sqrt{\det(1 - \tau_0(g))}$$

mit $\pm 1 = \operatorname{sign} T(\sigma(g))$.

a) *Zeigen Sie die Gleichung zunächst für* $\dim V = 2$, *z.B. durch konkretes Berechnen beider Seiten für ein explizites Element von* $\mathbf{Spin}(V)$.

b) *Folgern Sie dann die Gleichung allgemein durch Diagonalisierung. Überprüfen Sie zunächst* $\det(1 - \tau_0(g)) \geq 0$. *(20+15 Punkte)*

Bem.: $\det(1 - \tau(g))$ *ist der Charakter (d.h. die Spur) der Operation von* $\mathbf{SO}(V)$ *auf* $\Lambda^\bullet V$. *Die Gleichung beschreibt also die Beziehung* $\hat{\mathbf{S}} \otimes \hat{\mathbf{S}} = \Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$.

Übung 8.2. *Sei $*$ der Hodge-Operator auf einem $2n$-dimensionalen, orientierten, euklidischen Vektorraum V. Betrachte $\hat{\mathbf{S}} \otimes \hat{\mathbf{S}}^* \cong \Lambda^\bullet \otimes \mathbb{C}$ als Clifford-Modul wie in Übung 7.1.*

a) *Zeigen Sie, dass der Operator* $\hat{*} : \Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C} \to \Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$, $\hat{*}|_{\Lambda^k V \otimes \mathbf{C}} := i^{n+k\cdot(k-1)} *$ *eine natürliche* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-Graduierung auf dem Vektorraum* $\Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$ *definiert.*

b) *Vergleichen Sie die* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-Graduierung auf* $\Lambda^\bullet V \otimes \mathbf{C}$ *aus Aufgabenteil (a) über den Modulisomorphismus mit der* $\mathbf{Z}_2$*-Graduierung auf* $\hat{\mathbf{S}} \otimes \hat{\mathbf{S}}^*$ *gegeben durch*

$$\left(\hat{\mathbf{S}} \otimes \hat{\mathbf{S}}^*\right)^\pm = \hat{\mathbf{S}}^\pm \otimes \hat{\mathbf{S}}^*.$$

(20+15 Punkte)

Tipp: Vergleichen Sie den $\hat{*}$-Operator mit dem Chiralitäts-Operator γ.

Übung 8.3. *Sei M eine Spin-Mannigfaltigkeit und N eine orientierte Hyperfläche in M. Zeigen Sie, dass N spin ist. Folgern Sie, dass jede orientierte Hyperfläche in $\mathbf{R}^n$ spin ist. (Tipp: Konstruieren Sie zunächst eine Abbildung $\mathbf{SO}(N) \to \mathbf{SO}(M)$ mit Hilfe eines Normalenvektorfeldes).* *(30 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`