

Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
9. Übungsblatt (3.6.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 10.6.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 9.1. Sei M eine kompakte orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Folgern Sie, dass für die Operatoren auf $\mathfrak{A}^1(M)$ gilt

$$(d + d^*)^2 = \Delta^{T^*M} + \text{Ric}^\#$$

mit $\#$ angewendet auf eine der beiden Variablen in der Bilinearform Ric . Deduzieren Sie, dass die Existenz einer Metrik mit positiver Ricci-Krümmung das Verschwinden von $\ker(d + d^*)^2_{|T^*M}$ impliziert. (35 Punkte)

Übung 9.2. Für einen gerade-dimensionalen Vektorraum V , $a \in c(\Lambda^2 V)$ und die Spin-Darstellung $\hat{\mathbf{S}}$ von $\text{Cl}(V)$ erfüllt die (ungraduierte) Spur auf $\text{End } \hat{\mathbf{S}}$ die Formel

$$\text{Tr}(e_{\text{Cl}}^a)_{|\hat{\mathbf{S}}} = 2^{n/2} \det^{1/2} \cosh \frac{\tau(a)}{2}.$$

(Tipp: Verfahren Sie analog zu einem ähnlichen Satz aus der Vorlesung). (35 Punkte)

Übung 9.3. Die (nicht-assoziative) Algebra der Cayley-Zahlen $\mathbf{Ca}$ sei der $\mathbf{R}$ -Vektorraum $\mathbf{H}^2$ mit der Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$. Dann gilt für das innere Produkt $\langle x, y \rangle := \text{Re } x\bar{y}$ (mit Re als Projektion auf den eingebetteten $\mathbf{R}$ und $\bar{y} = -y + 2\text{Re } y$), dass $|xy| = |x| \cdot |y|$. Sei $V := \text{Im } \mathbf{Ca} \cong \mathbf{R}^7$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{Ca}$ ein $\text{Cl}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ -Modul ist mit der Operation $c(v)x := v \cdot x$. Ist dieser irreduzibel? Man kann zeigen, dass die induzierte Operation von $\mathbf{Spin}(7)$ auf S^7 transitiv operiert. Bestimmen Sie die Dimension der Isotropiegruppe $\mathbf{G}_2$ eines Punktes $p \in S^7$. (15+10+5 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html>