Übungen zu Globaler Analysis II

(SoSe 2025)

12. Übungsblatt (24.6.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 1.7.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 12.1. *Sei $(\mathcal{L}, h)$ ein hermitesches Linienbündel mit einem lokalen holomorphen Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{L})$ ohne Nullstellen. Bei $p \in M$ habe $\|s\|$ ein striktes lokales Maximum. Zeigen Sie, dass $\Omega^{\mathcal{L}}_p$ positiv ist in dem Sinne, dass $\frac{-1}{2\pi i}\Omega^{\mathcal{L}}_p(\cdot, J\cdot)$ eine positiv definite Bilinearform ist.* *(30 Punkte)*

(Tipp: Verwenden Sie [Komplexe Mgf., Korollar 1.8.11])

Übung 12.2. *Für die Operation von $\mathbf{Z} \times (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$, $(n, z) \mapsto 2^n z$ sei $S := (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbf{Z}$. Nach [Buch, Satz 6.4.8] ist der Quotient eine C^∞-Mannigfaltigkeit (das müssen Sie nicht beweisen).*

a) Beweisen Sie, dass S eine kanonische komplexe Struktur hat.

b) Zeigen Sie, dass S homöomorph zu $S^1 \times S^3$ ist.

c) Berechnen Sie die Betti-Zahlen $b_q(S) := \dim H^q(S)$. (10+15+10 Punkte)

Übung 12.3. *Betrachten Sie für die transitive Operation der unitären Gruppe $\mathbf{SU}(n+1)$ auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$, bei der ein Vektor $z = (z_0, \ldots, z_n)$ durch $A \in \mathbf{SU}(n+1)$ auf*

$$A \cdot (z_0 : \cdots : z_n) := [Az]$$

abgebildet wird.

a) Beweisen Sie, dass das Linienbündel $\mathcal{O}(1) \to \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ invariant unter der $\mathbf{SU}(n+1)$-Operation ist, d.h. $\forall A \in \mathbf{SU}(n+1) : A^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)$.

b) Überprüfen Sie, dass $c_1(\mathcal{O}(1))$ positiv ist (d.h. $c_1(\mathcal{O}(1))(\cdot, J\cdot)$ ist eine riemannsche Metrik), indem Sie dies an einem festen Punkt überprüfen und dann die $\mathbf{SU}(n+1)$-Operation verwenden. *(15+20 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`