# Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
## 13. Übungsblatt (1.7.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 8.7.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

**Übung 13.1.** *Sei $(M,\omega)$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit und $L : \mathfrak{A}^{p,q}(M) \to \mathfrak{A}^{p+1,q+1}(M)$, $\alpha \mapsto \omega \wedge \alpha$, $\Lambda := L^*$. In der Übungsgruppe wurden die* Hodge-Identitäten *(1941)*

$$[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*, \qquad [\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*,$$
$$[L, \overline{\partial}^*] = -i\partial, \qquad [L, \partial^*] = i\overline{\partial}$$

*und $[\partial, \overline{\partial}^*] = [\partial^*, \overline{\partial}] = 0$ gezeigt.*

*a) Folgern Sie $\Delta = 2\Box$ auf $\mathfrak{A}^\bullet(M)$.*

*b) Beweisen Sie $\forall 0 \le k \le \dim_{\mathbf{R}} M : H^k(M) \otimes \mathbf{C} \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$.*

*c) Zeigen Sie, dass komplexe Konjugation einen Isomorphismus $H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)}$ induziert.* *(10+15 Punkte)*

**Übung 13.2.** *a) Sei $(M,\omega)$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Finden Sie ein Element in $H^{p,p}(M) \setminus \{0\}$ für jedes $p = 0, \ldots, \dim_{\mathbf{C}} M$.*

*b) Sei $S$ wie in Übung 12.2. Überprüfen Sie, ob es eine Kähler-Metrik auf $S$ gibt.* *(25 Punkte)*

**Übung 13.3.** *Eine* Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit *ist eine kompakte Kähler Mannigfaltigkeit, für die* $\det_{\mathbf{C}} TM \cong \mathcal{O}$ *als holomorphe Bündel gilt. Sei $M$ einfach zusammenhängend; dies impliziert $H^1(M) = 0$, was Sie nicht zeigen müssen. Berechnen Sie den Hodge-Diamanten für* $\dim_{\mathbf{C}} M = 2$. *(Tipp: Bestimmen Sie als letztes* $\dim H^{1,1}(M)$ *mit Hilfe der Sätze von Chern-Gauß-Bonnet und Hirzebruch-Riemann-Roch.)* *(30 Punkte)*

Bemerkung zu diesen Mannigfaltigkeiten: Für ein 10-dimensionales Universum wäre der kompakte Faktor eine komplexe Dreimannigfaltigkeit $M$. Nach der Feldgleichung der Gravitation im Vakuum gilt für diese $c_1(TM) = 0$. Daraus läßt sich folgern, dass $M$ bis auf Überlagerung entweder ein 6-dimensionaler Torus $T^6$ oder eine einfach zusammenhängende 3-dimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit oder ein Produkt aus $T^2$ mit einer einfach zusammenhängenden 2-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist.

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`