Übungen zu Globaler Analysis II
(SoSe 2025)
14. Übungsblatt (8.7.2025)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag, 15.7.2025, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 14.1. *Sei M eine kompakte Kähler-Fläche (d.h. $\dim_{\mathbf{C}} M = 2$) mit* $\dim_{\mathbf{R}} H^1(M) = b_1$.

a) Berechnen Sie alle Dimensionen im Hodge-Diamanten in Termen der Euler-Charakteristik und der Signatur von M sowie b_1.

b) Sei M' eine Kähler-Fläche, die zu M orientiert diffeomorph ist. Folgern Sie, dass die Hodge-Diamanten von M, M' übereinstimmen.

c) Vergleichen Sie die Formel für $\chi(M, T^{*1,0}M)$, die Sie aus dem Hodge-Diamanten ablesen können, mit dem Ergebnis des Hirzebruch-Riemann-Roch-Satzes für das Bündel T^*M.

d) Zeigen Sie

$$\chi(M) - \operatorname{sign}(M) + 2b_1 \geq 0 \ , \quad \chi(M) + \operatorname{sign}(M) + 2b_1 \geq 4 \ .$$

(15+10+10+5 Punkte)

Übung 14.2. *Bestimmen Sie für M wie in Übung 14.1 die Signatur der Schnittform* $\sigma : H^2(M) \times H^2(M) \to \mathbf{R}$, $([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$

a) auf $H^2(M) \cap (H^{(2,0)}(M) \oplus H^{(0,2)}(M))$,

b) auf $\omega \cdot \mathbf{R} \subseteq H^2(M)$,

c) auf dem orthogonalen Komplement von ω in $H^2(M) \cap H^{(1,1)}(M)$.

(15+10+10 Punkte)

Übung 14.3. *Berechnen Sie für M wie in Übung 14.1 $\chi(M, \mathcal{O})$ in Termen von $\chi(M)$ und $\operatorname{sign} M$. Sei $\overline{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}$ die C^∞-Mannigfaltigkeit $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ versehen mit der umgekehrten Orientierung. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}$ keine kompatible Kähler-Struktur trägt. (Mit Bem. 5.28 folgt auf diese Weise sogar, dass es auf $\overline{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}$ keine kompatible fast-komplexe Struktur geben kann.)* *(5+20 Punkte)*

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2025/Vorlesung.html`