Übungen zur Analysis I
(WS 2026/27)
3. Übungsblatt (10.11.2026)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 17.11.2026, 10:30 in der Vorlesung.

Übung 3.1. *Für einen geordneten Körper K setze $K_0^+ := \{x \in K \mid x \geq 0\}$. Der* Betrag *sei*

$$\begin{aligned} |\cdot| : K &\to K_0^+, \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

In der Vorlesung wird in Hilfssatz 1.39 bewiesen werden, dass

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

für alle $x, y \in K_0^+$ gilt. Dies können Sie in dieser Aufgabe schon benutzen. Zeigen Sie für alle $x, y, z \in K$

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad |x-z| \leq |x-y| + |y-z| \quad \text{und} \quad \Big||x| - |y|\Big| \leq |x+y|$$

(Tipp zur ersten Ungleichung: Quadrieren Sie beide Seiten, aber Unterscheiden Sie die Fälle $x + y \geq 0, x + y < 0$). *(15+15+15 Punkte)*

Übung 3.2. *Sei K ein geordneter Körper und $M \subset K$ habe ein Infimum $\inf M > 0$. Zeigen Sie, dass $M^{-1} := \{\frac{1}{x} \mid x \in M\}$ ein Supremum hat mit $\sup(M^{-1}) = (\inf M)^{-1}$.* *(25 Punkte)*

Übung 3.3. *Überprüfen Sie die Existenz von Suprema, Infima, Minima, Maxima folgender Teilmengen von $\mathbf{Q}$ und bestimmen Sie sie gegebenenfalls:*

a) $\{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbf{Z}^+\}$.

b) $\Big\{x \in \mathbf{Q} \;\Big|\; |3 - 2x| < 5\Big\}$. *(15+15 Punkte)*

(insges. 100 Punkte)