

Übungen zum Vorkurs
WS 2026/27
Prof. Dr. Kai Köhler

1 Formulieren Sie folgende Aussagen mit $\wedge, \vee, \neg$ in möglichst kurzer Gestalt:

- a) Von den Aussagen A_1, A_2, A_3 sind genau zwei wahr.
- b) Von den Aussagen A_1, A_2, A_3 ist mindestens eine wahr.

2 Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel (mit 8 Zeilen), dass

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

wahr ist.

3 Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass

$$(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow B$$

und

$$\neg A \vee B$$

äquivalente Aussagen sind.

4 Der Kreter Epimenides behauptet in einem Gedicht (7 Jhr. v. Chr.): *"Die Kreter lügen immer."*

- a) Ist das widersprüchlich (d.h. ein Paradoxon)?
- b) Was können Sie logisch über Epimenides' Aussage folgern?

(Historische Bem.: Eigentlich meinte Epimenides in seinem Gedicht den kretischen Glauben, dass Zeus sterblich wäre. Im Gedicht läßt er Minos obiges Zitat sprechen.)

5 Formalisieren Sie folgende Aussagen mit Quantoren und Prädikaten:
Jeder Topf hat einen passenden Deckel.
Keine zwei Menschen haben dieselben Fingerabdrücke.

6 Welche der folgenden Mengen sind gleich?

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 1, 1, 3\}, \quad C = \{1, 1, 2, 3\}, \quad D = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

7 Welche der folgenden Objekte sind Elemente der Menge $M = \{a, b, c\}$?

$$a, \quad \{a\}, \quad \{a, b\}.$$

8 Listen Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c\}$ auf.

9 Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{2, 4, 5, 7\}$. Berechnen Sie

$$A \cap (B \cup C), (A \cap B) \cup (A \cap C), (A \setminus B) \setminus C, A \setminus (B \setminus C).$$

10 Zeigen Sie mit den Regeln der Aussagenlogik und mit dem Aussonderungsaxiom, dass für 3 Mengen A, B, C

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C), \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

gilt. Zeichnen Sie zur Veranschaulichung Venn-Diagramme.

11 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass 7 die Zahl $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ teilt für alle $n \geq 1$.

12 Die Fibonacci-Zahlen $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ werden induktiv definiert durch $a_0 := 1$, $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$ für $n \geq 0$.

13 Wo steckt in folgendem Induktions-Beweis, dass alle Zahlen gleich sind, der Fehler?

- a) Induktionsanfang (bei $n = 1$): Eine Zahl ist sich selber gleich.
- b) Induktionsschritt: Seien $(n + 1)$ -viele Zahlen gegeben. Die ersten n davon sind nach Induktionsannahme gleich, ebenso die letzten n , also sind alle $n + 1$ gleich.

14 Bestimmen Sie mit der Potenzmengenbildung $\mathcal{P}$ die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

15 Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen für alle Mengen A_1, A_2, B_1, B_2 gelten:

$$(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) ,$$

$$(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) .$$