Übungen zu Globaler Analysis III
(SoSe 2026)
3. Übungsblatt (1.5.2026)

Abgabe der Lösungen nächsten Freitag, 8.5.2026, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 3.1. *Sei γ die Operation auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ aus Übung 1.1.*

a) Bestimmen Sie das Ergebnis der Atiyah-Bott-Fixpunktformel für den Dolbeault-Operator für $\mathcal{O}(m) \to \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ mit $m \in \mathbf{Z}$.

b) Berechnen Sie mit (a) $\dim H^0(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \mathcal{O}(m))$ *für $m > 0$ (Tipp: Wähle $\gamma_j := e^{it\varphi_j}$ und überprüfe, was für $t \to 0$ passiert). (15+20 Punkte)*

Übung 3.2. *Für ein komplexes Vektorbündel $E \to M$ sei das zugehörige* projektive Bündel $\mathbf{P}E \to M$ *definiert als Quotient von $E \setminus \{0\}$ durch die Relation $s \sim \lambda s$ für $s \in E_p \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbf{C}^\times$. Für $m \in \mathbf{Z}$ setze als Geradenbündel über $P^k\mathbf{C}$*

$$\mathcal{O}(m) := \begin{cases} \mathcal{O}(1)^m & \text{für} \quad m \geq 0 \\ \mathcal{O}(-1)^{-m} & \phantom{\text{für}} \quad m < 0. \end{cases}$$

Sei $n \in \mathbf{Z}$ und

$$F_n := \big\{ \big((a:b),(x:y:z)\big) \in \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^2\mathbf{C} \,\big|\, a^{-n}x = b^{-n}y \big\}.$$

a) Zeigen Sie, dass F_n eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

b) Beweisen Sie mit der Projektion $\pi : F_n \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ auf den ersten Faktor, dass sich F_n mit dem Raum identifizieren läßt, der entsteht, wenn jede Faser von $\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(-n) \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ durch $\mathbf{P}(\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(-n))$ ersetzt wird.

(15+15 Punkte)

Übung 3.3. *Sei $n \in \mathbf{Z}$, F_n wie oben. Sei γ_t eine Operation der Form $((a:b),(x:y:z)) \mapsto ((e^{t\lambda}a:b),(e^{t\lambda n}x:y:e^{t\mu}z))$ mit isolierten Fixpunkten.*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte und die infinitesimale Operation Φ^{TF_n}, Φ^{L_1}, Φ^{L_2} dort auf TF_n, $L_1 := \pi^*\mathcal{O}(1)$ und dem Linienbündel L_2, das aus den $\mathcal{O}(1)$-Bündeln der Fasern von π gebildet wird.

b) Berechnen Sie das Ergebnis der Atiyah-Bott-Fixpunktformel für den de Rham- und den Dolbeault-Operator. (20+15 Punkte)

(insges. 100 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2026/Vorlesung.html`