Übungen zu Globaler Analysis III
(SoSe 2026)
4. Übungsblatt (8.5.2026)

Abgabe der Lösungen nächsten Freitag, 15.5.2026, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 4.1. *Sei F_n die Fläche aus Übung 3.2.*

a) *Zeigen Sie für $n > 0$, dass über $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ die kurze exakte Sequenz von holomorphen Vektorbündeln*

$$\begin{array}{rlll} 0 \to \mathcal{O} & \to \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(n-1) & & \to \mathcal{O}(n) \to 0 \\ s & \mapsto \begin{pmatrix} z_0 s \\ z_1^{n-1} s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} & \mapsto -z_1^{n-1} s_0 + z_0 s_1 \end{array}$$

wohldefiniert ist.

b) *Konstruieren Sie über $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ einen Isomorphismus von komplexen C^∞-Vektorbündeln $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(n-1) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)$.*

c) *Beweisen Sie $\mathbf{P}(L \otimes V) \overset{\text{can.}}{\cong} \mathbf{P}V$ für eine Gerade L und einen Vektorraum V und folgern Sie, dass F_n und F_{n+2} diffeomorph sind.*

d) *Zeigen Sie, dass F_0 diffeomorph zu $S^2 \times S^2$ ist. (10+15+15+10 Punkte)*

Übung 4.2. *Sei X ein Vektorfeld auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$, das eine lineare Operation wie in Übung 1.1 erzeugt. Der Einfachheit halber sei das Produkt $\prod_{j=0}^{n} \gamma_j = 1$.*

a) *Geben Sie die Beiträge in der Bott-Residuenformel zu $\int_{\mathbf{P}^n\mathbf{C}} c_1(T\mathbf{P}^n\mathbf{C})^n$ an jedem Fixpunkten an.*

b) *Bestimmen Sie die Residuen (aus der Funktionentheorie) der Funktion $\frac{z^n}{\prod_{j=0}^{n}(\alpha_j - z)}$ für paarweise verschiedene $\alpha_j \in \mathbf{C}$.*

c) *Verwenden Sie letzteres, um die Fixpunktterme der Residuenformel zu einem von X unabhängigem Ausdruck zu summieren.*

d) *Berechnen Sie analog $\int_{\mathbf{P}^n\mathbf{C}} c_1(\mathcal{O}(1))^n$.* *(10+10+20+10 Punkte)*

(insges. 100 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2026/Vorlesung.html`