Übungen zu Globaler Analysis III

(SoSe 2026)

11. Übungsblatt (26.6.2026)

Abgabe der Lösungen nächsten Freitag, 3.7.2026, bis 10:30 in der Vorlesung.

Übung 11.1. *Sei* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ *für* $s >> 0$ *die Riemannsche Zetafunktion. Berechnen Sie* $\zeta(-1)$ *mit der Methode aus dem Beweis von Satz 9.5 (von Euler wurde dieser Wert als* $1+2+3+\dots$ *interpretiert). Bestimmen Sie mit derselben Methode den ersten Term der Laurententwicklung von* ζ *bei* $s = 1$.

(25+13 Punkte)

Übung 11.2. *Geben Sie für* $Z(s)$ *aus Übung 10.2 den Wert* $Z'(0)$ *als eine Summe von konvergenten Integralen an (mit der Methode aus dem Beweis von Satz 9.5). (Tatsächlich lässt sich dieser Wert mit anderen Methoden explizit ausrechnen).* *(25 Punkte)*

Übung 11.3. *Sei* $Z(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{m^s(m+1)^s}$ *und* ζ *die Riemannsche Zetafunktion. In dieser Übung wird eine Methode zur Berechnung von* $Z'(0)$ *durchgeführt. Sie dürfen sich aber alternativ auch andere Methoden ausdenken.*

a) *Zerlegen Sie* $Z'(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$ *in zwei Reihen, so dass die Reihenglieder von* $Z_1(s)$ *Vielfache von* $\log m$ *und die von* $Z_2(s)$ *Vielfache von* $\log(m+1)$ *sind. Ersetzen Sie* $m+1$ *durch* m *in* Z_2.

b) *Verwenden Sie die Taylorentwicklungen von* $(1 \pm \frac{1}{m})^{-s}$, *um* Z_1, Z_2 *mit Linearkombinationen von* ζ' *an verschiedenen Stellen zu beschreiben.*

c) *Folgern Sie aus (b)* $Z'(0) = 4\zeta'(-1) - \frac{1}{2}$ *mit Übung 11.1.*

(7+15+15 Punkte)

(insges. 100 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2026/Vorlesung.html`