Torsion analytique équivariante sur $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

Kai KÖHLER

Rubrique: Géométrie différentielle (19)

Abstract: We calculate an equivariant version of the complex Ray-Singer torsion for all bundles on the $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ and for the trivial line bundle on $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, for isometries which have isolated fixed points. The result gives for all n a part of the Gillet-Soulé R-genus.

Résumé: On calcule une version équivariante de la torsion complexe de Ray- Singer pour tous les fibrés sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et pour le fibré trivial sur $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ relativement à une isométrie à points fixes isolés. Le résultat donne pour tous les n une partie du genre R de Gillet-Soulé.

Version française abrégée

La torsion analytique a été construite par Ray et Singer [**11**] comme un analogue analytique de la torsion de Reidemeister. Partant d'un résultat de Quillen, Bismut, Gillet et Soulé [**1**] ont prouvé de remarquables propriétés pour la torsion des fibrés vectoriels sur des fibrations. Soit en effet $\pi : M \to B$ une application holomorphe propre de variétés complexes, et soit ξ un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur M. Soit $R\pi_*\xi$ l'image directe de ξ. Alors la torsion analytique des fibres de π induit une métrique sur le déterminant de la cohomologie de Knudsen-Mumford $\lambda^{KM} := (\det R\pi_*\xi)^{-1}$ qui est un fibré en droites holomorphe sur B. Dans [**1**], on a calculé la courbure de la connexion holomorphe hermitienne de la métrique de Quillen. On obtiens ainsi une version raffinée du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

Soit maintenant $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion de variétés compactes complexes. Soit η un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur Y, et soit ξ une résolution de η par un complexe des fibrés vectoriels sur X. Bismut et Lebeau [**2**] ont calculé la relation entre les métriques de Quillen sur les déterminants de la cohomologie de η et de ξ. A l'aide de ces résultats, Gillet et Soulé [**6**] ont démontré un théorème de Riemann-Roch en géométrie d'Arakelov pour la première classe de Chern de l'image directe (voir [**12**]). Ce théorème a été étendu par Faltings [**3**] à tout le caractère de Chern.

La preuve du théorème de Riemann-Roch utilise un calcul par Gillet, Soulé et Zagier [**5**] de la torsion sur les espaces projectifs complexes. Ce calcul a permis à Gillet et Soulé de conjecturer un théorème de Riemann-Roch. Ce même calcul assez difficile donne en particulier le genre R de Gillet-Soulé, qui apparaît explicitement dans le théorème de Riemann-Roch. C'est le genre additif associé à la série

$$R(x) = \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \text{odd}}} \Big(2\zeta'(-\ell) + \zeta(-\ell)\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{j}\Big)\frac{x^\ell}{\ell!}\ ,$$

ou ζ est la fonction zêta de Riemann.

Considérons maintenant une isométrie holomorphe d'un fibré vectoriel hermitien sur une varieté kählerienne. On peut définir une version équivariante de la torsion en correspondance avec le calcul de Ray de la torsion analytique réelle pour des espaces lenticulaires. Soit en effet M une variété kählerienne de fibré tangent holomorphe TM, soit ξ un fibré vectoriel hermitien sur M et soit $\Box_q$ l'opérateur de Laplace-Kodaira agissant sur des sections de $\Lambda^q T^{*(0,1)}M \otimes \xi$. Soit g une isométrie holomorphe de M. Supposons que le fibré et les métriques soient invariants par l'action de g. Soit $\mathrm{Eig}_\lambda(\Box_q)$ l'espace propre de $\Box_q$ correspondant à la valeur propre λ et g^* l'action induite par g sur $\Gamma(\Lambda^q T^{*(0,1)}M \otimes \xi)$. Considérons la fonction

$$Z(g,s) := \sum_{\substack{q>0 \\ \lambda \in \mathrm{Spec}\,\Box_q \\ \lambda \neq 0}} (-1)^{q+1} q \lambda^{-s} \,\mathrm{Tr}\, g^*_{|\ \mathrm{Eig}_\lambda(\Box_q)}\,,$$

pour $\mathrm{Re}\ s \gg 0$. La torsion équivariante de M relative à l'action de g est alors définie comme l'exponentielle de la dérivée à zéro $Z'(g,0)$ du prolongement holomorphe de $Z(g,\cdot)$,

$$\tau(g) := e^{-\frac{1}{2}Z'(g,0)}\,.$$

Dans cet article on présente le calcul de la torsion équivariante pour les fibrés holomorphes sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et pour le fibré trivial sur les $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ relativement à une isométrie à points fixes isolés, pour la métrique de Fubini-Study. Pour une rotation d'angles $\in \pi \cdot \mathbb{Q}$, on obtient une expression fermée oú la fonction gamma intervient. Pour des angles arbitraires,le resultat final fait intervenir une partie de la fonction R de Gillet-Soulé **[5]**.

Cette partie s'obtient comme suit. Soit pour $0 < \varphi < 2\pi$ et $s > 0$ $\zeta^{\mathrm{rot}}(\varphi, s)$ la série Dirichlet

$$\zeta^{\mathrm{rot}}(\varphi,s) := \sum_{k\geq 1} \frac{\sin k\varphi}{k^s}\,.$$

Alors ζ^{rot} peut être vu comme la partie imaginaire d'une fonction ζ de Lerch. Soit $R^{\mathrm{rot}}(\varphi) := \frac{\partial}{\partial s}\zeta^{\mathrm{rot}}(\varphi,0)$. On obtient aisément en utilisant des résultats classiques la

Proposition 1. R^{rot} *est donné par la formule*

$$R^{\mathrm{rot}}(\varphi) = \frac{C + \ln\varphi}{\varphi} - \sum_{\substack{\ell\geq 1 \\ \ell \text{ odd}}} \zeta'(-\ell)(-1)^{\frac{\ell+1}{2}} \frac{\varphi^\ell}{\ell!}\,.$$

Si $\varphi = 2\pi\frac{p}{q}$ *avec* $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$, *alors*

$$R^{\mathrm{rot}}(\varphi) = -\tfrac{1}{2}\ln q \cdot \cot\frac{\varphi}{2} + \sum_{\ell=1}^{q-1} \ln\Gamma\left(\frac{j}{q}\right)\cdot \sin j\varphi\,.$$

Soit $E := \mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_n)$ un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, équipé de la métrique standard (i.e. la courbure de $\mathcal{O}(1)$ est la forme de Fubini-Study). D'après un théorème de Grothendieck **[4]**, tout fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ possède cette forme. On trouve le

Théorème 2. *La torsion analytique équivariante $\tau(E,\varphi)$ relativement à une rotation d'un angle $\varphi \in]0,2\pi[$ est donnée par la formule*

$$-2\ \ln\ \tau(E,\varphi) = \frac{2R^{\text{rot}}(\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \cos(k_j+1)\frac{\varphi}{2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{|k_j+1|} \frac{\sin(2m-|k_j+1|)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\ \ln\ j\,.$$

Soit maintenant $\Phi := \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_{n+1} \end{pmatrix}$ un élément de la sous-algèbre Cartan maximale (canonique) de $\mathfrak{su}(n+1)$, définissant une isométrie infinitésimale de $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \cong SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$. Supposons que les φ_j sont distincts. Alors on a le

Théorème 3. *La torsion équivariante $\tau(\mathcal{O},e^\Phi)$ pour le fibré trivial en droite $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ est donnée par*

$$-2\ \ln\ \tau(\mathcal{O},e^\Phi) = (-1)^n \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n+1} 2iR^{\text{rot}}(\varphi_j-\varphi_k) \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n+1} (e^{i(\varphi_k-\varphi_\ell)}-1)^{-1} - \ \ln\ n!\,.$$

English version

The analytic torsion was constructed by Ray and Singer [**11**] as an analytic analogue to the Reidemeister torsion. Bismut, Gillet and Soulé [**1**] proved as an extension of a result of Quillen remarkable properties of the torsion in connection with vector bundles on fibrations:

Let $\pi : M \to B$ be a proper holomorphic map of complex manifolds and let ξ be a hermitian holomorphic vector bundle on M. Let $R\pi_*\xi$ be the right-derived direct image of ξ. Then the analytic torsion of the fibres of π induces a metric on the Knudsen-Mumford determinant $\lambda^{KM} := (\det R\pi_*\xi)^{-1}$ which is a holomorphic line bundle on B. The curvature of this Quillen metric as well as its behaviour under changes of the metrics on M and ξ was expressed in [**1**] explicitly by means of secondary Bott-Chern classes. In particular this gives a refinement of the Riemann-Roch theorem for families.

On the other hand let $i : Y \hookrightarrow X$ be an embedding of compact complex manifolds. Let η be a hermitian holomorphic vector bundle on Y and let ξ be a resolution of η by a complex of vector bundles on X. Bismut and Lebeau [**2**] calculated the relation between the Quillen metric of η and ξ. With the help of this result, Gillet and Soulé [**6**] were able to proof a Riemann-Roch theorem in Arakelov geometry for the first Chern class of the direct image (see [**12**] for the theorem and some background information). This theorem was later proved by Faltings [**3**] for higher degrees.

The proof of the Riemann-Roch theorem uses a calculation of Gillet, Soulé and Zagier [**5**] of the torsion for the trivial line bundle on the complex projective spaces $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. This led Gillet and Soulé to conjecture this theorem, which was the initial motivation for [**2**]. This rather difficult calculation gives in particular the Gillet-Soulé R-genus, which appears explicitly in the theorem. This is the additive genus associated to the function

$$R(x) = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ \text{odd}}} \Big(2\zeta'(-\ell) + \zeta(-\ell) \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{j} \Big) \frac{x^\ell}{\ell!} \,,$$

where ζ is the Riemann zeta function. To obtain this series, one has to caculate the torsion of $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ for every n.

Consider now a holomorphic isometry g of a hermitian vector bundle over a Kähler manifold. One can define an equivariant version of the torsion as an analogue to Ray's [**10**] calculation of the real analytic torsion for lens spaces. Let M be a Kähler manifold of complex dimension n with holomorphic tangent bundle TM and Kähler metric g_M, ξ a hermitian vector bundle on M and $\bar\partial$ the Dolbeault operator acting on sections of $\Lambda^q T^{*(0,1)} M \otimes \xi$. We define the hermitian product on the vector space of smooth sections of $\Lambda^q T^{*(0,1)} M \otimes \xi$ by

$$(\eta, \eta') := \int_M (\eta(x), \eta'(x)) \frac{\omega^n}{(2\pi)^n n!}$$

as in [**5**]. Consider the adjoint operator $\bar\partial^*$ relative to this product and the Kodaira-Laplace operator

$$\Box_q := (\bar\partial + \bar\partial^*)^2 : \Gamma(\Lambda^q T^{*(0,1)} M \otimes \xi) \to \Gamma(\Lambda^q T^{*(0,1)} M \otimes \xi) \,.$$

Let g be a holomorphic isometry of M. Assume that the bundle and its hermitian metric are invariant under the induced action of g. Let $\mathrm{Eig}_\lambda(\Box_q)$ be the eigenspace of $\Box_q$ corresponding to the eigenvalue λ and g^* the of g induced action on $\Gamma(\Lambda^q T^{*(0,1)} M \otimes \xi)$.

Consider the zeta function

$$Z(g,s) := \sum_{\substack{q>0 \\ \lambda \in \operatorname{Spec} \Box_q \\ \lambda \neq 0}} (-1)^{q+1} q \lambda^{-s} \operatorname{Tr} g^*_{| \ \mathrm{Eig}_\lambda(\Box_q)}$$

for $\mathrm{Re}\ s \gg 0$. The equivariant torsion of M associated to the action of g is then defined as an exponential of minus half of the derivation at zero $Z'(g,0)$ of the holomorphic continuation of $Z(g,\cdot)$,

$$\tau(g) := e^{-\frac{1}{2} Z'(g,0)} \,.$$

In this paper we present the calculation of the equivariant analytic torsion for all holomorphic bundles on $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ and for the trivial line bundle on $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, where the projective spaces are equipped with the Fubini-Study metric. We consider only isometries with isolated fixed points. For a rotation by a angles $\in \pi \cdot \mathbb{Q}$, we obtain a closed expression involving the gamma function. For arbitrary angles it appears, as an infinite series, a part of the Gillet-Soulé R-function. This is relatively easy to calculate because the defining ζ-function Z has no singularities in contrast to the situation in [**5**]. The similarity between R and our result gives us the hope to an easier approach to their results.

For $0 < \varphi < 2\pi$ and $\mathrm{Re}\ s > 0$, let $\zeta^{\mathrm{rot}}(\varphi, s)$ be the Dirichlet series

$$\zeta^{\mathrm{rot}}(\varphi, s) := \sum_{k \geq 1} \frac{\sin k\varphi}{k^s} \,.$$

Then $\zeta^{\rm rot}$ can be seen as the imaginary part of a Lerch zeta function. We set $R^{\rm rot}(\varphi) := \frac{\partial}{\partial s}\zeta^{\rm rot}(\varphi,0)$. One obtains easily by using classical results the

Proposition 1. *$R^{\rm rot}$ is equal to*

$$R^{\rm rot}(\varphi) = \frac{C + \ln\varphi}{\varphi} - \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \ell \text{ odd}}} \zeta'(-\ell)(-1)^{\frac{\ell+1}{2}}\frac{\varphi^\ell}{\ell!}\,.$$

If $\varphi = 2\pi\frac{p}{q}$ with $p,q\in\mathbb{N}$, $0<p<q$, then

$$R^{\rm rot}(\varphi) = -\tfrac{1}{2}\ln q\cdot\ \cot\frac{\varphi}{2} + \sum_{\ell=1}^{q-1}\ \ln\Gamma\left(\frac{j}{q}\right)\cdot\sin j\varphi\,,$$

where Γ is the gamma function and $C=-\Gamma'(1)$ is Euler's constant.

Let $E := \mathcal{O}(k_1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{O}(k_n)$ be a holomorphic vector bundle on $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, equipped with the standard metric (i.e. the curvature of $\mathcal{O}(1)$ is the Fubini-Study Kähler form). By a theorem of Grothendieck, each holomorphic vector bundle on $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ is of this form. Then we find

Theorem 2. *The equivariant analytic torsion $\tau(E,\varphi)$ with respect to a rotation by an angle $\varphi\in]0,2\pi[$ of $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2_{1/2}$ is given by*

$$-2\ \ln\tau(E,\varphi) = \frac{2R^{\rm rot}(\varphi)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\cos(k_j+1)\frac{\varphi}{2} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{|k_j+1|}\frac{\sin(2m-|k_j+1|)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\ \ln j\,.$$

We see in particular that the equivariant torsion τ gives already for the trivial line bundle $\mathcal{O}$ on $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ the function

$$\ln\tau(\mathcal{O},\varphi) = \cot\frac{\varphi}{2}\cdot\left(i\sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \text{odd}}}\zeta'(-\ell)\frac{(i\varphi)^\ell}{\ell!} - \frac{C+\ln\varphi}{\varphi}\right).$$

Let now $\Phi := \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_{n+1}\end{pmatrix}$ be an element of the (canonical) maximal Cartan subalgebras of $\mathfrak{su}(n+1)$, which defines an infinitesimal isometry on $\mathbb{P}^n\mathbb{C}\cong SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$. Assume that all the φ_j are distinct. Then we have

Theorem 3. *The equivariant torsion $\tau(\mathcal{O},e^\Phi)$ for the trivial line bundle $\mathcal{O}$ on $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ is given by*

$$-2\ \ln\tau(\mathcal{O},e^\Phi) = (-1)^n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n+1} 2iR^{\rm rot}(\varphi_j-\varphi_k)\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n+1}(e^{i(\varphi_k-\varphi_\ell)}-1)^{-1} - \ln n!\,.$$

Proof (see [**8**]): The eigenvalues and eigenspaces for the Kodaira Laplacian for the trivial line bundle on $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ were determined explicitly by Ikeda and Taniguchi [**7**]. If one regards $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ as $SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$, the eigenspaces can be described by sums of irreducible representations of $SU(n+1)$. See for this idea also an article by Malliavin and Malliavin [**9**]. As Gillet and Soulé, we are using Ikeda's and Taniguchi's method and their results to determine explicitly the ζ-function Z in our case. The derivative at zero is then obtained by some calculations on Fourier series and determinants.

The function R^{rot} has a rather simple definition and hence a lot of special properties. We give here only a few of them.

Remark 4. *The following identities hold*

$$\begin{aligned}
&(1) & R^{\mathrm{rot}}(\varphi) &= -R^{\mathrm{rot}}(2\pi-\varphi)\,,\\
&(2) & 2R^{\mathrm{rot}}(2\varphi) &= R^{\mathrm{rot}}(\varphi)+R^{\mathrm{rot}}(\pi+\varphi)+\ln 2\cdot\cot\varphi\,,\\
&(3) & 3R^{\mathrm{rot}}(3\varphi) &= R^{\mathrm{rot}}(\varphi)+R^{\mathrm{rot}}\Big(\frac{2\pi}{3}+\varphi\Big)\\
& & &\quad - R^{\mathrm{rot}}\Big(\frac{2\pi}{3}-\varphi\Big)+\frac{3}{2}\ln 3\cdot\cot\frac{3\varphi}{2}\,,\\
&(4) & R^{\mathrm{rot}}(\pi+\varphi) &= \int_0^\infty \ln x\,\frac{\sinh\varphi x}{\sinh\pi x}dx\,.
\end{aligned}$$

Acknowledgement: The author would like to thank Prof. J.-M. Bismut for sharing the idea of this problem with him. This article is a part of the author's thesis.

References

[**1**] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III, Comm. in Math. Physics **115** (1988), 49–78, 79–126, 301–351.

[**2**] J.-M. Bismut, G. Lebeau: Complex immersions and Quillen metrics, to appear in Publ. Math. IHES.

[**3**] G. Faltings: Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem, Princeton University Press 1992.

[**4**] A Grothendieck: Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math. **79** (1956), 121–138.

[**5**] H. Gillet, C. Soulé: Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, with an appendix by D. Zagier, Topology **30** (1991), 21–54.

[**6**] H. Gillet, C. Soulé: An arithmetic Riemann-Roch theorem, Preprint IHES/M/91/50.

[**7**] A. Ikeda, Y. Taniguchi: Spectra and Eigenforms of the Laplacian on S^n and $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, Osaka J. Math. **15** (1978), 515–546.

[**8**] K. Köhler: Equivariant analytic torsion on $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, to appear.

[**9**] M.-P. Malliavin, P. Malliavin: Diagonalisation du système de de Rham-Hodge au-dessus d'un espace riemannien homogène, Lect. Notes Math. **466** (1975), 135–146, Springer-Verlag.

[10] D.B. Ray: Reidemeister torsion and the Laplacian on lens spaces, Adv. in Math. **4** (1970), 109–126.

[11] D.B. Ray, I.M. Singer: Analytic torsion for complex manifolds, Ann. Math. **98** (1973), 154–177.

[12] C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol, J. Kramer: Lectures on Arakelov Geometry, Cambridge studies in advanced math. 33, Cambridge University Press 1992.

Kai Köhler
Département de Mathématique
Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY