Eine Normalform für Kurven in den Grassmannvarietäten

Diplomarbeit

von

Jens Piontkowski

aus

Hilden

angefertigt am Mathematischen Institut IV der

Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf 1993

Einleitung

Diese Arbeit entstammt den Gebieten der algebraischen Geometrie und der komplexen Differentialgeometrie. Untersucht werden Kurven in den Grassmannvarietäten $\mathrm{G}(n, N)$, also holomorphe Abbildungen, die jedem Punkt einer Riemannschen Fläche einen n-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{C}^N$ zuordnen.

Ehrhard untersuchte in [E] bereits parametrisierte Regelflächen, das sind Kurven in der $\mathrm{G}(2, 4)$, hierbei wird — vom projektiven Standpunkt aus gesehen — jeder Punkt einer Riemannschen Fläche auf eine Gerade des $\mathbb{P}_3$ abgebildet. Er konnte diese klassifizieren in abwickelbare und nicht–abwickelbare Flächen, wobei sich die abwickelbaren noch einmal in Tangentenflächen und Kegel unterteilten.

Ziel dieser Arbeit ist, Griffiths' und Harris' Satz über eine Normalform von Kurven in beliebigen Grassmannvarietäten zu beweisen ([G/H1, 2.2]) und damit eine Klassifikation dieser Kurven zu erhalten.

Der Satz über die Normalform besagt, daß sich eine Kurve in der $\mathrm{G}(n, N)$ aus assoziierten Kurven von Kurven im $\mathbb{P}_{N-1}$ und einem konstanten Anteil zusammensetzen läßt, so daß die Anzahl der assoziierten Kurven minimal ist.

Unter den assoziierten Kurven zu einer Kurve φ im $\mathbb{P}_{N-1}$ versteht man die Kurven, die jedem Punkt s der Riemannschen Fläche den Punkt $\varphi(s)$ selber (0–te assoziierte Kurve), die Tangente an $\varphi(s)$ (1–te assoziierte Kurve) bzw. die Schmiegebene (2–te assoziierte Kurve) usw. zuordnen.

Im ersten Kapitel werden die Grassmannvarietäten eingeführt, dabei folge ich Harris ([H, Lecture 6]) und zeige zuerst, daß sie projektive Varietäten sind, bevor für den komplexen Fall ihre Struktur als Untermannigfaltigkeit angegeben wird. Bei den Sätzen habe ich versucht, möglichst geometrische Beweise zu führen. Am Ende des ersten Kapitels werden noch die bekannten Zusammenhänge über die Dualität $\mathcal{D}$, die jedem Untervektorraum den bzgl. der kanonischen Bilinearform senkrechten zuordnet, erläutert.

Im zweiten Kapitel wird nach einer kurzen Einführung über das Liften und Fortsetzen von Kurven im projektiven Raum mit der Untersuchung der Kurven in den Grassmannvarietäten begonnen. Dabei werden die von Ehrhard in [E] dargestellten Ideen weiter ausgebaut. So werden die direkte Summe, die Summe und der Schnitt zweier Kurven definiert, die punktweise fast überall die entsprechenden Konstruktionen aus der linearen Algebra sind. Die Rolle der Vektoren wird in diesem Zusammenhang von den Leitkurven, das sind Kurven in der $\mathrm{G}(1, N) = \mathbb{P}_{N-1}$, übernommen.

Das dritte Kapitel dient dem Beweis der Normalform. Die Hauptschwierigkeit war zu zeigen, daß die von Griffiths und Harris für eine Kurve Φ definierten Kurven $\Phi + \Phi'$ und $\Phi \cap \Phi'$, die für einen Punkt s der Riemannschen Fläche die Summe bzw. den Schnitt von $\Phi(s)$ mit dem „unendlich–nahen Untervektorraum“ darstellen[1], holomorph sind. Zu meiner Überraschung

[1] Mit den Bezeichnungen aus [G/H1] $\mathbb{P}_y^m + \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_y^m}{\mathrm{d}w}$ bzw. $\mathbb{P}_y^m \cap \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_y^m}{\mathrm{d}w}$.

entdeckte ich dabei, daß diese beiden Konstruktionen durch die Dualität $\mathcal{D}$ auf natürliche Weise zusammenhängen, nämlich

$$\Phi \cap \Phi' = \mathcal{D}((\mathcal{D}\oplus) + (\mathcal{D}\oplus)') \quad \text{bzw.} \quad \oplus + \oplus' = \mathcal{D}((\mathcal{D}\oplus) \cap (\mathcal{D}\oplus)').$$

Nach der Definition von $\Phi + \Phi'$ und $\Phi \cap \Phi'$ kann der um eine Eindeutigkeitsaussage erweiterte Satz über die Normalform bewiesen werden, wobei die Beweisidee aus [G/H1] etwas modifiziert wurde. Den Abschluß bildet eine Anwendung des Satzes auf die Regelflächen.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Fischer für das schöne Thema und seine Betreuung der Arbeit. Nun hoffe ich, daß der Leser bei der Lektüre zumindest etwas von der Freude empfindet, die ich bei der Bearbeitung hatte.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Grassmannvarietäten

Schon lange ist bekannt, daß sich eine Hyperfläche im projektiven Raum als Punkt im dualen projektiven Raum auffassen läßt, insbesondere also eine Gerade in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ als Punkt in der dualen projektiven Ebene $\mathbb{P}_2^*$. Aber erst Plücker hatte die Idee, die Geraden im projektiven Raum $\mathbb{P}_3$ als Punkte im $\mathbb{P}_5$ zu betrachten. Dabei ist die Einbettung so gewählt, daß die Punkte des $\mathbb{P}_5$, „die von den Geraden des $\mathbb{P}_3$ stammen", eine Varietät bilden, die Plücker–Quadrik.

Die Verallgemeinerung dieser Gedanken führt zu den Grassmannvarietäten.

Vereinbarung

In diesem Kapitel bezeichne k einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

1.1 Definition und Einbettung in den $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$

Definition

Die Grassmannvarietät $\mathrm{G}(n,N)$ für $n,N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq n \leq N$ ist die Menge der n–dimensionalen Untervektorräume des k^N, i. Z.

$$\mathrm{G}(n,N) := \{V < k^N \mid \dim V = n\}.$$

Analog setzt man für den projektiven Raum $\mathbb{P}_N$

$$\mathbb{G}(n,N) := \{V < \mathbb{P}_N \mid \dim V = n\}.$$

Da den $(n+1)$–dimensionalen Untervektorräumen des k^{N+1} auf kanonische Weise n–dimensionale Unterräume des $\mathbb{P}_N$ entsprechen, kann man die $\mathrm{G}(n+1,N+1)$ mit der $\mathbb{G}(n,N)$ identifizieren, so daß diese beiden Schreibweisen nur eine unterschiedliche Interpretation andeuten. Eine der einfachsten Möglichkeiten, einen Untervektorraum zu beschreiben, ist eine Basis anzugeben. Durch Zusammenfassen der Basisvektoren zu einer Matrix erhalten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\gamma}: & \{M \in \mathrm{M}(N \times n, k) \mid \text{rang } M = n\} & \longrightarrow & \mathrm{G}(n,N) \\ & \begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_n\}. \end{array}$$

Damit aus dieser Surjektion eine Bijektion wird, definiert man die Äquivalenzrelation $\sim$.

Für $A, B \in \mathrm{M}(N \times n, k)$ ist

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, C \in \mathrm{GL}(n,k):\; A \cdot C = B$$

Das Faktorisieren der Matrizen nach dieser Äquivalenzrelation führt zu der bijektiven Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \{M \in \mathrm{M}(N \times n, k) \mid \operatorname{rang} M = n\}/\!\sim & \longrightarrow & \mathrm{G}(n, N) \\ & \left[\begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{pmatrix}\right] & \longmapsto & \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}. \end{array}$$

Um die Grassmannvarietät besser untersuchen zu können, betten wir sie mit Hilfe der Plückereinbettung ε in den projektiven Raum $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$ ein.

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon: & \mathrm{G}(n, N) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^n k^N) \\ & W = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\} & \longmapsto & \mathbb{P}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) \end{array}$$

Man muß dabei kurz überlegen, ob ε wohldefiniert ist. Wenn eine andere Basis $\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_n}$ von W gewählt wurde, dann gibt es eine Matrix $M \in \mathrm{GL}(n, k)$, die den Basiswechsel beschreibt, d. h.

$$(\widetilde{w_1} \ \ldots \ \widetilde{w_n}) = (w_1 \ \ldots \ w_n) \cdot M.$$

Damit ist

$$\widetilde{w_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{w_n} = w_1 \wedge \ldots \wedge w_n \cdot \det M,$$

also

$$\mathbb{P}(\widetilde{w_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{w_n}) = \mathbb{P}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n).$$

Bevor wir zeigen, daß ε auch injektiv ist, machen wir noch eine

Definition

$\omega \in \bigwedge^n k^N$ heißt zerlegbar genau dann, wenn es $w_1, \ldots, w_n \in k^N$ gibt mit $\omega = w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$.

Offensichtlich ist $\omega \in \bigwedge^n k^N \setminus \{0\}$ genau dann zerlegbar, wenn $\mathbb{P}(\omega) \in \operatorname{Im} \varepsilon$.

Sei nun $\mathbb{P}(\omega) \in \operatorname{Im} \varepsilon$, dann ist $\omega \in \bigwedge^n k^N \setminus \{0\}$ zerlegbar, d. h. $\omega = w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ mit $w_1, \ldots, w_n \in k^N$. Wegen $\omega \neq 0$ ist $\dim \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\} = n$, und nach den Eigenschaften des Dachproduktes gilt für $w \in k^N$

$$w \in \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\} \iff w \wedge \omega = 0,$$

also

$$\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\} = \{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\}.$$

Damit ist die folgende Abbildung wohldefiniert

$$\begin{aligned} \delta : \quad \operatorname{Im} \varepsilon &\longrightarrow \quad \mathrm{G}(n, N) \\ \mathbb{P}(\omega) &\longmapsto \{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\}. \end{aligned}$$

Für die Injektivität von ε reicht es zu zeigen, daß $\delta\varepsilon = \mathrm{id}\big|_{\mathrm{G}(n,N)}$. Dies ist aber klar, denn für n linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ gilt

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon(\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}) &= \delta(\mathbb{P}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n)) \\ &= \{w \in k^N \mid w \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = 0\} \\ &= \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}. \end{aligned}$$

$\square$

Mit Hilfe von $\varepsilon\gamma$ lassen sich leicht die zu $W = \gamma([M]) \in \mathrm{G}(n, N)$ gehörigen homogenen Koordinaten des $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$, die Plückerkoordinaten für W, angeben. Sei dafür $e_1, \ldots, e_N$ die Standardbasis des k^N, dann bilden die $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ für $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ eine Basis des $\bigwedge^n k^N$. Bezüglich dieser Basis ist

$$\varepsilon\gamma([M]) = \mathbb{P}\left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \ldots, N\} \\ \#I = n}} \alpha_I e_I \right),$$

wobei die $\alpha_I \in k$ die $n \times n$–Minoren von M sind, genauer ist α_I für $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ die Determinante der Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_n$ von M besteht.

Bis jetzt sind die Grassmannvarietäten nur eine Teilmenge des $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$, jetzt soll gezeigt werden, daß sie den Namen Varietäten wirklich verdienen, dabei soll das Bild von ε mit $\mathrm{G}(n, N)$ identifiziert werden.

Satz 1.1

Die Grassmannvarietät $\mathrm{G}(n, N)$ *ist eine Varietät im projektiven Raum* $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$.

Für den Beweis sind die folgenden zwei Hilfssätze nützlich.

Hilfssatz 1.2

Für $\omega \in \bigwedge^n k^N \setminus \{0\}$ *sind äquivalent:*

1. ω *ist zerlegbar.*

2. $\dim\{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\} = n$.

Beweis Für zerlegbares ω hatten wir schon weiter oben gesehen, daß dann auch 2 gelten muß.

Zum Beweis der Umkehrung wählen wir eine Basis $b_1, \ldots, b_n \in k^N$ von $\{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\}$, diese Vektoren lassen sich dann zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_N$ des k^N ergänzen. Also besitzt ω eine Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \ldots, N\} \\ \# I = n}} \alpha_I b_I,$$

wobei $\alpha_I \in k$ und $b_I := b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n}$ für $I = \{i_1, \ldots, i_n\},\ i_1 < i_2 < \ldots < i_n$.
Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{b_i \wedge b_I\}_{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \setminus \{i\},\ \#I=n}$ und der Gleichung

$$0 = b_i \wedge \omega = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I=n}} \alpha_I (b_i \wedge b_I) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \setminus \{i\} \\ \#I=n}} \alpha_I (b_i \wedge b_I)$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt $\alpha_I = 0$ für alle $I \subseteq \{1, \ldots, N\} \setminus \{i\}$, $\#I = n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Also ist nur $\alpha_{\{1,\ldots,n\}} \neq 0$, d. h. ω ist zerlegbar. $\square$

Durch eine leichte Modifikation des zweiten Teils des Beweises erhalten wir den

Hilfssatz 1.3
Für alle $\omega \in \bigwedge^n k^N \setminus \{0\}$ *gilt*

$$\dim\{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\} \leq n.$$

Mit diesen technischen Hilfsmitteln gerüstet, geht es zum

Beweis von Satz 1.1 Für $\omega \in \bigwedge^n k^N \setminus \{0\}$ betrachten wir die folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\omega) \in \mathrm{G}(n, N) = \mathrm{Im}\ \varepsilon \\ \Longleftrightarrow\quad & \omega \text{ ist zerlegbar.} \\ \overset{\text{HS 1.2}}{\Longleftrightarrow}\quad & \dim\{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\} = n \\ \overset{\text{HS 1.3}}{\Longleftrightarrow}\quad & \dim\{w \in k^N \mid w \wedge \omega = 0\} \geq n \\ \Longleftrightarrow\quad & \varphi(\omega) : k^N \longrightarrow \textstyle\bigwedge^{n+1} k^N,\ w \longmapsto w \wedge \omega \text{ hat Rang } \leq N - n. \end{aligned}$$

Nun ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^n k^N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k^N, \bigwedge^{n+1} k^N) \\ \omega & \longmapsto & \varphi(\omega) \end{array}$$

linear, d. h. die Einträge der Matrix $\varphi(\omega) \in \mathrm{Hom}(k^N, \bigwedge^{n+1} k^N)$ sind Linearformen auf dem $\bigwedge^n k^N$, also homogene Polynome vom Grad 1 in den Koordinaten des $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$. Damit ist $\mathrm{G}(n,N)$ das Nullstellengebilde der $(N-n+1) \times (N-n+1)$–Minoren dieser Matrix. □

Leider erzeugen die so erhaltenen Polynome nicht das homogene Ideal von $\mathrm{G}(n,N) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$, um die Erzeuger zu bekommen, muß man schon mehr Arbeit investieren (s. [G/H2, p. 211]). Da diese aber für unsere Überlegungen ohne Belang sind, betrachten wir hier zum besseren Verständnis lieber zwei

Beispiele

1. Die einfachsten nicht–trivialen Beispiele sind die projektiven Räume $\mathbb{P}_N = \mathbb{G}(0,N) = \mathrm{G}(1,N+1)$.

2. $\mathbb{G}(1,N) = \mathrm{G}(2,N+1)$ sind die Geraden im projektiven Raum $\mathbb{P}_N$. In diesem Fall kann man die beschreibenden Gleichungen leicht angeben, wenn man $\mathrm{char}(k) \neq 2$ voraussetzt, denn für $\omega \in \bigwedge^2 k^N \setminus \{0\}$ gilt

   $$\omega \text{ zerlegbar} \Longleftrightarrow \omega \wedge \omega = 0.$$

   Beweis „ $\Rightarrow$ “ ist klar. Sei daher $\omega \in \bigwedge^2 k^N \setminus \{0\}$ mit $\omega \wedge \omega = 0$, d. h.

   $$\omega = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I=2}} \alpha_I e_I \neq 0 \qquad (\text{o. E. } \alpha_{1\,2} = 1)$$

   und

   $$\alpha_{1\,2}\alpha_{i\,j} - \alpha_{1\,i}\alpha_{2\,j} + \alpha_{1\,j}\alpha_{2\,i} = 0 \text{ für } 3 \leq i < j \leq N.$$

   Wenn wir jetzt

   $$\begin{aligned} v &:= (v_i) := (1, 0, -\alpha_{2\,3}, \ldots, -\alpha_{2\,N})^{\mathrm{T}} \\ w &:= (w_i) := (0, 1, \alpha_{1\,3}, \ldots, \alpha_{1\,N})^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

setzen, ist $v \wedge w = \omega$, denn sei $\sum \beta_I e_I := v \wedge w$, so erhalten wir für

$$
\begin{aligned}
\beta_{1\,2} &= v_1 w_2 - v_2 w_1 = 1 = \alpha_{1\,2} \\
\beta_{1\,j} &= v_1 w_j - v_j w_1 = 1 w_j - v_j 0 = \quad w_j = \alpha_{1\,j} \text{ für } j \geq 3 \\
\beta_{2\,j} &= v_2 w_j - v_j w_2 = 0 w_j - v_j 1 = -v_j = \alpha_{2\,j} \text{ für } j \geq 3 \\
\beta_{i\,j} &= v_i w_j - v_j w_i = -\alpha_{2\,i}\alpha_{1\,j} + \alpha_{2\,j}\alpha_{1\,i} = \alpha_{1\,2}\alpha_{i\,j} = \alpha_{i\,j} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } 3 \leq i < j \leq N.
\end{aligned}
$$

□

Die Gleichung $\omega \wedge \omega = 0$ repräsentiert $\binom{N}{4}$ quadratische Gleichungen, die die $\mathrm{G}(n, N)$ ausschneiden und sogar (zufällig) das homogene Ideal $\mathrm{I}(\mathrm{G}(2, N))$ erzeugen. Der wichtigste Fall ist die Plücker–Quadrik $Q := \mathrm{G}(2, 4) = \mathbb{G}(1, 3) = \mathrm{V}(X_{1\,2}X_{3\,4} - X_{1\,3}X_{2\,4} + X_{1\,4}X_{2\,3}) \subseteq \mathbb{P}_5$, die, wie eingangs erwähnt, die Menge aller Geraden im $\mathbb{P}_3$ darstellt.

Um ein noch besseres Bild von den Grassmannvarietäten zu bekommen, ist es vorteilhaft, sie mit der affinen Standardüberdeckung des $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$ zu schneiden. Zur Schreibvereinfachung führen wir dies nur für

$$
U := \left\{ \mathbb{P}\left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,N\} \\ \# I = n}} \alpha_I e_I \right) \mid \alpha_{\{1,\dots,n\}} = 1 \right\} \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)
$$

durch. Dann ist

$$
\gamma^{-1}(U \cap \mathrm{G}(n, N)) = \left\{ M \in \mathrm{M}(N \times n, k) \mid \det M_{\{1,\dots,n\}} \neq 0 \right\} / \sim,
$$

wobei $M_{\{1,\dots,n\}}$ die Matrix sein soll, die aus den ersten n Zeilen von M besteht. Für eine Matrix $M \in \mathrm{M}(N \times n, k)$ mit $\det M_{\{1,\dots,n\}} \neq 0$ existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $C \in \mathrm{GL}(n, k)$, nämlich $C = M^{-1}_{\{1,\dots,n\}}$, so daß $M \cdot C = \binom{\mathrm{E}_n}{\tilde{M}}$, d. h. in der Klasse $[M]$ gibt es einen ausgezeichneten Repräsentanten, und wir erhalten die Bijektion

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{\gamma}: \quad V := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{E}_n \\ \overline{M} \end{smallmatrix} \right) \mid \overline{M} \in \mathrm{M}\left((N-n) \times n, k\right) \right\} & \longrightarrow & \mathrm{G}(n,N) \cap U \\
\begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ \\ \overline{M} \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}} \alpha_I e_I
\end{array}
$$

$\alpha_I =$ Minor der Zeilen I von $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{E}_n \\ \overline{M} \end{smallmatrix} \right)$.

Die Koordinaten von $\overline{\gamma} \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{E}_n \\ \overline{M} \end{smallmatrix} \right)$ sind also die $n \times n$–Minoren von $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{E}_n \\ \overline{M} \end{smallmatrix} \right)$, das ist aber dasselbe, wie die Minoren jeder Größe von $\overline{M}$ und einer 1, insbesondere kommen die Matrixeinträge selber als Koordinaten vor ! Sei $\pi : U \cap \mathrm{G}(n,N) \longrightarrow V$ die Projektion dieser Koordinaten (Achtung wichtig: $\alpha_{\{1,\ldots,n\}} = 1$). Dann gilt:

1. π ist die zu $\overline{\gamma}$ inverse Abbildung.

2. $\overline{\gamma}$, π sind regulär.

Somit ist $\mathrm{M}\left((N-n) \times n, k\right) \cong V$ biregulär zu $\mathrm{G}(n,N) \cap U$.

Im Falle $k = \mathbb{C}$ gilt sogar:

3. $\overline{\gamma}$, π sind stetig.

4. $\overline{\gamma}$ ist immersiv.

Zusammenfassend erhalten wir den

Satz 1.4

Für $k = \mathbb{C}$ ist die Grassmannvarietät $\mathrm{G}(n,N)$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{P}(\bigwedge^n \mathbb{C}^N)$ der Dimension $n(N-n)$.

Beweis Wegen der obigen Überlegungen ist nur noch die Kompaktheit zu zeigen; dies ist jedoch klar, da $\mathrm{G}(n, N)$ eine abgeschlossene Menge in dem kompakten Raum $\mathbb{P}(\bigwedge^n \mathbb{C}^N)$ ist. $\square$

1.2 Inzidenzvarietäten

In der algebraischen Geometrie kommt es häufiger vor, daß man zu einem gegebenen Untervektorraum V des k^N die Menge der n–dimensionalen Untervektorräume betrachten muß, deren Schnitt mit V die Dimension größer oder gleich l hat, für $l \in \mathbb{N},\ 0 \leq l \leq n \leq N$. Um diese Mengen wieder mit den Methoden der algebraischen Geometrie untersuchen zu können, muß man wissen, daß sie wiederum Varietäten sind.

Satz 1.5

$$\begin{aligned} \Sigma_l(V) := \{ \quad W \quad \in \mathrm{G}(n, N) \quad &| \quad \dim(V \cap W) \geq l\} \\ = \{ \ \mathbb{P}(\omega) \in \mathrm{G}(n, N) \quad &| \quad v_1 \wedge \ldots \wedge v_{\dim V - l+1} \wedge \omega = 0 \\ &\quad\ \ \text{für alle } v_1, \ldots, v_{\dim V - l+1} \in V\} \end{aligned}$$

ist eine Varietät.

Beweis Daß $\Sigma_l(V)$ algebraisch ist, ergibt sich, wenn wir uns die Gleichungen in der unteren Menge bezüglich der Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n+\dim V - l+1}}\}_{\substack{\{i_1, \ldots, i_{n+\dim V - l+1}\} \subseteq \{1, \ldots, N\} \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+\dim V - l+1}}}$$

ausgeschrieben denken. Die Polynome, die $\Sigma_l(V)$ aus $\mathrm{G}(n, N)$ ausschneiden, sind dann genau die Koeffizienten der Basisvektoren.

Für die Gleichheit der beiden Mengen überlegen wir uns, daß für $W = \mathbb{P}(\omega) \in \mathrm{G}(n, N)$ gilt

$$
\begin{aligned}
& \dim(V \cap W) \geq l \\
\iff\; & \forall\, v_1, \ldots, v_{\dim V - l+1} \in V : \dim(\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{\dim V - l+1}\} \cap W) \geq 1 \text{ oder} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \dim \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{\dim V - l+1}\} < \dim V - l + 1 \\
\iff\; & \forall\, v_1, \ldots, v_{\dim V - l+1} \in V : v_1 \wedge \ldots \wedge v_{\dim V - l+1} \wedge \omega = 0.
\end{aligned}
$$

Eine andere Möglichkeit, den Beweis zu führen, wäre eine Modifikation des Beweises von Satz 1.7. □

Für die Inzidenzvarietäten soll jetzt auch noch, grob gesprochen, das V variiert werden. Wir werden das hier in drei Schrittten durchführen.

Die einfachste Inzidenzvarietät, der hier untersuchten, ist die Menge der Paare von Untervektorräumen des k^N, die sich nicht–trivial schneiden.

Satz 1.6

$$
\begin{aligned}
\Omega(n, n', N) := \{ \quad (V, W) \quad & \in \mathrm{G}(n, N) \times \mathrm{G}(n', N) \mid V \cap W \neq \{0\}\} \\
= \{(\mathbb{P}(\upsilon), \mathbb{P}(\omega)) & \in \mathrm{G}(n, N) \times \mathrm{G}(n', N) \mid \upsilon \wedge \omega = 0\}
\end{aligned}
$$

ist eine Varietät.

Beweis analog zum vorherigen Satz □

Beispiel

$\Omega(1, 2, N) = \{(g, E) \in \mathrm{G}(1, N) \times \mathrm{G}(2, N) \mid g \cap E \neq 0\}$ ist die Menge der Paare von Geraden und Ebenen, bei denen die Gerade die Ebene nicht–trivial schneidet, dies bedeutet aber, daß die Gerade in der Ebene liegt.

Wenn wir die gleiche Situation auch im projektiven Raum nachbilden wollen, so kommen wir mit Ω nicht mehr aus, denn dafür käme nur $\Omega(2, 3, N + 1)$ in Frage, das sind aber — projektiv gesehen — Paare von Geraden und

Ebenen, die sich mindestens in einem Punkt schneiden, aber die Gerade muß nicht notwendig in der Ebene liegen.

Wenden wir uns daher der nächsten Inzidenzvarietät zu.

Satz 1.7

Die Menge der Paare von Untervektorräumen, wobei der erste im zweiten liegt,

$$\mathrm{F}(n, n', N) := \{(V, W) \in \mathrm{G}(n, N) \times \mathrm{G}(n', N) \mid V \subseteq W\}$$

ist, für $0 \leq n \leq n' \leq N$, *eine Varietät, die Fahnenvarietät.*

Beweis Diesmal ist der Beweis leider nicht so einfach. Eine algebraische Version findet man in [E, Satz 1.6], hier soll eine mehr geometrische gegeben werden.

Sei $e_1, \ldots, e_N$ die Standardbasis des k^N, dann sind $\{e_I\}_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}}$ und $\{e_{I'}\}_{\substack{I' \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I' = n'}}$ Basen des $\bigwedge^n k^N$ bzw. $\bigwedge^{n'} k^N$. Die affinen Standardüberdeckungen des $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$ und des $\mathbb{P}(\bigwedge^{n'} k^N)$ bezeichnen wir mit

$$U_{\widetilde{I}} := \left\{ \mathbb{P}(\omega) \in \mathbb{P}(\bigwedge^n k^N) \mid \omega = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}} \alpha_I e_I, \ \alpha_{\widetilde{I}} = 1 \right\}$$

für $\widetilde{I} \subseteq \{1, \ldots, N\}, \ \#\widetilde{I} = n$ bzw.

$$U'_{\widetilde{I'}} := \left\{ \mathbb{P}(\omega') \in \mathbb{P}(\bigwedge^{n'} k^N) \mid \omega' = \sum_{\substack{I' \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I' = n'}} \alpha'_{I'} e_{I'}, \ \alpha'_{\widetilde{I'}} = 1 \right\}$$

für $\widetilde{I'} \subseteq \{1, \ldots, N\}, \ \#\widetilde{I'} = n'$.

Zunächst soll gezeigt werden, daß

$$\mathrm{F}(n, n', N) \cap \big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n, N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I'}} \cap \mathrm{G}(n', N)\Big)$$

für alle $\widetilde{I}$ und $\widetilde{I}'$ Zariski–abgeschlossen in $\big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big)$ ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir dies nur für $U := U_{\{1,\ldots,n\}}$ und $U' := U'_{\{1,\ldots,n'\}}$ durchführen. Dafür haben wir die Parametrisierungen

$$\begin{array}{rccc} \overline{\gamma}: & \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ M \end{pmatrix} \mid M \in \mathrm{M}\left((N-n) \times n, k\right) \right\} & \longrightarrow & \mathrm{G}(n,N) \cap U \\ \overline{\gamma}': & \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{n'} \\ M' \end{pmatrix} \mid M' \in \mathrm{M}\left((N-n') \times n', k\right) \right\} & \longrightarrow & \mathrm{G}(n',N) \cap U' \end{array}$$

Für $\overline{\gamma}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ M \end{pmatrix} = \mathbb{P}(\omega)$ und $\overline{\gamma}'\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{n'} \\ M' \end{pmatrix} = \mathbb{P}(\omega')$ erhalten wir die folgende Kette von Äquivalenzen, wenn $b_1, \ldots, b_n \in k^N$ und $b'_1, \ldots, b'_{n'} \in k^N$ die Spalten von $\begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ M \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{n'} \\ M' \end{pmatrix}$ bezeichnen.

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}(\omega) \subseteq \mathbb{P}(\omega') \\ \Longleftrightarrow & \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq \operatorname{span}\{b'_1, \ldots, b'_{n'}\} \\ \Longleftrightarrow & \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}: \; b_i \in \operatorname{span}\{b'_1, \ldots, b'_{n'}\} \\ \Longleftrightarrow & \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}: \; \operatorname{rang}\big(b_i\, b'_1\, \ldots\, b'_{n'}\big) \leq n' \\ \Longleftrightarrow & \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \text{ verschwinden alle} \\ & (n'+1) \times (n'+1)\text{–Minoren von } \big(b_i\, b'_1\, \ldots\, b'_{n'}\big) \end{array}$$

Der letzten der äquivalenten Bedingungen entsprechen $n\binom{N}{n'+1}$ Polynomgleichungen in den Einträgen von M und M'. Diese Einträge kommen jedoch wegen $\alpha_{\{1,\ldots,n\}} = 1$ und $\alpha'_{\{1,\ldots,n'\}} = 1$ in den α_I bzw. $\alpha'_{I'}$ vor (vgl. Betrachtungen vor Satz 1.4), und man erhält die gesuchten Bedingungen an die Koordinaten von ω und ω'.

Daß es reicht zu zeigen, daß $\mathrm{F}(n,n',N) \cap \big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big)$ in $\big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big)$ abgeschlossen ist für alle $\widetilde{I}$ und $\widetilde{I}'$, sieht man am einfachsten mit topologischen Argumenten in der Zariski–Topologie. $\complement \mathrm{F}(n,n',N) \cap \big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big)$ ist offen in $\big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big)$ (selber offen in $\mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(n',N)$) und damit auch in $\mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(n',N)$.

Als Vereinigung offener Mengen ist

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{\widetilde{I},\widetilde{I}'} \complement\mathrm{F}(n,n',N) \cap \big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big) \\
&\qquad = \complement\mathrm{F}(n,n',N) \cap \bigcup_{\widetilde{I},\widetilde{I}'} \big(U_{\widetilde{I}} \cap \mathrm{G}(n,N)\big) \times \Big(U'_{\widetilde{I}'} \cap \mathrm{G}(n',N)\Big) \\
&\qquad = \complement\mathrm{F}(n,n',N) \cap \mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(n',N)
\end{aligned}$$

offen in $\mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(n',N)$, damit ist $\mathrm{F}(n,n',N)$ abgeschlossen, d. h. eine Varietät. $\square$

Zum Schluß soll noch die Menge der Paare von Untervektorräumen untersucht werden, die miteinander einen Schnitt der Dimension mindestens l haben.

Satz 1.8

$$\Psi(l,n,n',N) = \{(V,W) \in \mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(n',N) \mid \dim(V \cap W) \geq l\}$$

ist eine Varietät für $0 \leq l \leq n, n' \leq N$.

Beweis Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned}
X &:= \{(V,W,V',W') \mid V \subseteq W,\ V' \subseteq W',\ V = V'\} \\
&\subseteq \mathrm{F}(l,n,N) \times \mathrm{F}(l,n',N) \\
&\subseteq \mathrm{G}(l,N) \times \mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(l,N) \times \mathrm{G}(n',N).
\end{aligned}$$

Da X eine Varietät ist (Satz 1.7), ist auch nach dem Hauptsatz der Eliminationstheorie das Bild von X unter der Projektion

$$\pi : \mathrm{G}(l,N) \times \mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(l,N) \times \mathrm{G}(n',N) \longrightarrow \mathrm{G}(n,N) \times \mathrm{G}(n',N)$$

eine Varietät, und $\pi(X)$ ist gerade $\Psi(l,n,n',N)$. $\square$

Die bisher betrachteten Varietäten ergeben sich sämtlich als Spezialfälle hiervon, so ist $\Omega(n,n',N) = \Psi(1,n,n',N)$, $\mathrm{F}(n,n',N) = \Psi(n,n,n',N)$ und $\{V\} \times \Sigma_l(V) = \Psi(l, \dim V, n, N) \cap \{V\} \times \mathrm{G}(n,N)$.

Eine erste Anwendung der Inzidenzvarietäten ist die folgende Aussage.

Satz 1.9

Sei $X \subseteq \mathbb{G}(n,N)$ eine Untervarietät, dann ist die Vereinigung dieser Untervektorräume

$$\bigcup_X := \bigcup_{V \in X} V \subseteq \mathbb{P}_N$$

eine Varietät.

Beweis Wenn $Z := \mathrm{F}(1, n+1, N+1) = \{(x,V) \mid x \in V\} \subseteq \mathbb{P}_N \times \mathbb{G}(n,N)$ und π_1 bzw. π_2 die Projektionen von Z auf $\mathbb{P}_N$ bzw. $\mathbb{G}(n,N)$ bezeichnen, ist $\bigcup_X = \pi_1(\pi_2^-(X))$ und damit nach dem Hauptsatz der Eliminationstheorie algebraisch. □

1.3 Eine Dualität

Im nächsten Kapitel wird es von Interesse sein, den Schnitt zweier Untervektorräume durch die Vereinigung zweier „dualer“ Untervektorräume ausdrücken zu können. Wir definieren dafür die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{D}: & \mathrm{G}(n,N) & \longrightarrow & \mathrm{G}(N-n,N) \\ & W & \longmapsto & \{v \in \mathbb{C}^N \mid v^{\mathrm{T}} \cdot w = 0 \ \ \forall\, w \in W\}. \end{array}$$

Eigentlich wird hier für jedes n und N eine andere Abbildung definiert, die wir jedoch, da Verwechslungen ausgeschlossen sind, alle mit $\mathcal{D}$ bezeichnen wollen.

Mit Hilfe einfacher linearer Algebra beweist man die folgenden Eigenschaften von $\mathcal{D}$.

Hilfssatz 1.10

1. *$\mathcal{D}$ ist wohldefiniert.*
2. *$\mathcal{D} \circ \mathcal{D} = \mathrm{id}$*
3. *$V \subseteq W \iff \mathcal{D}(\mathcal{V}) \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{W})$*
4. *Für $V \in \mathrm{G}(n, N)$ und $W \in \mathrm{G}(n', N)$ gilt:*
   (a) *$V \cap W = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{V}) + \mathcal{D}(\mathcal{W}))$*
   (b) *$V + W = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{W}))$*

Daß sich die Abbildung nicht nur für einzelne Untervektorräume wie gewünscht verhält, sondern sich auch mit den Untervarietäten der Grassmannvarietät verträgt, ist die Aussage des nächsten Satzes.

Satz 1.11
$\mathcal{D} : \mathrm{G}(\backslash, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathcal{N} - \backslash, \mathcal{N})$ ist ein Isomorphismus von Varietäten.

Insbesondere ist $\mathcal{D}$ für $k = \mathbb{C}$ biholomorph.

Beweis Es reicht die Behauptung lokal zu beweisen, hier wieder nur exemplarisch auf den offen Mengen

$$U := \left\{ \mathbb{P}\left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \#I = n}} \alpha_I e_I \right) \in \mathbb{P}(\bigwedge^n k^N) \mid \alpha_{\{1,\ldots,n\}} = 1 \right\}$$

und

$$V := \left\{ \mathbb{P}\left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N\} \\ \# J = N-n}} \beta_J e_J \right) \in \mathbb{P}(\bigwedge^{N-n} k^N) \mid \beta_{\{n+1,\dots,N\}} = 1 \right\}.$$

Wir nutzen die Parametrisierungen

$$\begin{array}{rccc} \overline{\gamma}: & \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{M}\left((N-n) \times n, k\right) \right\} & \longrightarrow & \mathrm{G}(n,N) \cap U \\ \overline{\gamma}': & \left\{ \begin{pmatrix} B \\ \mathrm{E}_{N-n} \end{pmatrix} \mid B \in \mathrm{M}\left(n \times (N-n), k\right) \right\} & \longrightarrow & \mathrm{G}(N-n,N) \cap V. \end{array}$$

Wenn wir jetzt die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}: & \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{M}\left((N-n) \times n, k\right) \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{pmatrix} B \\ \mathrm{E}_{N-n} \end{pmatrix} \mid B \in \mathrm{M}\left(n \times (N-n), k\right) \right\} \\ & \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -A^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{E}_{N-n} \end{pmatrix} \end{array}$$

definieren, erhalten wir:

1. T ist ein Isomorphismus.

2. Für jede $(N-n) \times n$–Matrix A ist

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{T}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -A^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{E}_{N-n} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} = (-A \ \ \mathrm{E}_{N-n}) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{E}_n \\ A \end{pmatrix} \\ &= -A + A = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{D}\big|_{\mathrm{G}(\backslash,\mathcal{N})\cap\mathcal{U}\to\mathrm{G}(\mathcal{N}-\backslash,\mathcal{N})\cap\mathcal{V}} = \overline{\gamma}'\mathrm{T}\overline{\gamma}^{\,-\infty}$ und, weil $\overline{\gamma}'$, T und $\overline{\gamma}$ Isomorphismen sind, ist auch $\mathcal{D}\big|_{\mathrm{G}(\backslash,\mathcal{N})\cap\mathcal{U}\to\mathrm{G}(\mathcal{N}-\backslash,\mathcal{N})\cap\mathcal{V}}$ ein Isomorphismus. $\square$

Kapitel 2

Kurven

Jetzt haben wir genügend über Grassmannvarietäten erfahren, um mit der Untersuchung der Kurven darin beginnen zu können.
Dafür sei im weiteren der Grundkörper k immer gleich $\mathbb{C}$.

Definition
Eine Kurve in der Grassmannvarietät $\mathrm{G}(n, N)$ ist eine holomorphe Abbildung $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ von einer Riemannschen Fläche S in die $\mathrm{G}(n, N)$.
Insbesondere sprechen wir im Fall $\mathrm{G}(1, N+1) = \mathbb{P}_N$ von einer Kurve im projektiven Raum $\mathbb{P}_N$.

Vereinbarung
S bezeichne eine Riemannsche Fläche.

Bevor wir uns ganz den Kurven in den Grassmannvarietäten zuwenden, empfiehlt es sich, noch kurz Kurven in projektiven Räumen zu betrachten, denn erstens sind die einfachsten Grassmannvarietäten $\mathrm{G}(1, N+1) = \mathbb{P}_N$ projektive Räume, und zweitens haben wir ja $\mathrm{G}(n, N)$ in den $\mathbb{P}(\bigwedge^n k^N)$ eingebettet.

2.1 Kurven in projektiven Räumen

Hier sind für uns zwei Techniken von Bedeutung, das Liften und das Fortsetzen von holomorphen Abbildungen, dies ermöglicht einerseits später mit den Kurven regelrecht zu „rechnen“, und andererseits wird damit den Kurven über kritische Punkte „hinweggeholfen“.

Wir beginnen mit dem Liften.

Satz 2.1

Sei $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}_N$ eine Kurve und s_0 ein Punkt in S, dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq S$ von s_0 und eine holomorphe Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \quad mit \quad \varphi = \mathbb{P}(\widetilde{\varphi}).$$

$\widetilde{\varphi}$ heißt Liftung von φ.

Ist $\widetilde{\psi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ eine weitere holomorphe Abbildung mit $\varphi = \mathbb{P}(\widetilde{\psi})$, so gibt es eine holomorphe Funktion $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ mit $\widetilde{\psi} = \lambda\widetilde{\varphi}$, d. h. Liftungen sind bis auf einen holomorphen Faktor eindeutig.

Beweis Sei (U, s) eine Kartenumgebung von $s_0 \in S$ und U sei gleich so klein gewählt, daß $\varphi(U)$ ganz in eine affine Standardkarte (V, π) des $\mathbb{P}_N$ paßt. Ohne Einschränkung sei

$$\begin{array}{rccc} \pi : & V = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}_N \mid x_0 \neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ & (x_0 : x_1 : \ldots : x_N) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_N}{x_0}\right), \end{array}$$

dann ist $\pi\varphi$ nach Definition holomorph. Wenn wir noch die holomorphe Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \\ & (x_1, \ldots, x_N) & \longmapsto & (1, x_1, \ldots, x_N) \end{array}$$

hintendranhängen, erhalten wir die gewünschte Abbildung

$$\widetilde{\varphi} := \varepsilon\pi\varphi\,|_U \,: U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\},$$

da $\mathbb{P}(\varepsilon\pi) = \mathrm{id}\,|_V$.

Sei nun $\widetilde{\psi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ eine weitere holomorphe Abbildung mit $\varphi = \mathbb{P}(\widetilde{\psi})$, d. h. für alle $s \in U$ gibt es ein $\lambda_s \in \mathbb{C}^*$ mit

$$\widetilde{\psi}(s) = (\widetilde{\psi}_0(s), \ldots, \widetilde{\psi}_N(s)) = \lambda_s \widetilde{\varphi}(s) = \lambda_s\,(1, \widetilde{\varphi}_1(s), \ldots, \widetilde{\varphi}_N(s))\,.$$

Daraus folgt, daß $\lambda(s) := \lambda_s = \widetilde{\psi}_0(s)$ holomorph und $\widetilde{\psi} = \lambda\widetilde{\varphi}$ ist. $\square$

Kommen wir jetzt zum Fortsetzungssatz, in dem eine Abbildung mit Hilfe von lokalen „beinahe“–Liftungen in einzelnen Punkten fortsetzt wird.

Satz 2.2 (Fortsetzungssatz)
Sei U eine offene Menge von S und $X \subseteq U$ eine Menge von isolierten Punkten . Weiter sei eine holomorphe Abbildung $\varphi : U \setminus X \longrightarrow \mathbb{P}_N$ gegeben, so daß zu jedem $s_0 \in X$ eine offene Umgebung $U_{s_0} \subseteq U$ und eine holomorphe Abbildung $\widetilde{\varphi}_{s_0} : U_{s_0} \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ existiert mit $\mathbb{P}(\widetilde{\varphi}_{s_0}) = \varphi$ auf $U_{s_0} \setminus X$.
Dann läßt sich φ eindeutig auf U fortsetzen, d. h. man kann φ so in den Punkten X definieren, daß $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}_N$ holomorph wird.

Beweis (vgl. [Fi, 5.4], [E, 2.4]) Für $s_0 \in X$ nehme man die entsprechende Abbildung $\widetilde{\varphi} := \widetilde{\varphi}_{s_0} : U_{s_0} \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$. Sei ohne Einschränkung $U_{s_0} \cap X = \{s_0\}$, somit ist $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_0, \ldots, \widetilde{\varphi}_N)$ außerhalb von s_0 ungleich 0, da dort $\mathbb{P}(\widetilde{\varphi})$ definiert ist. Wenn l das Minimum der Nullstellenordnungen der $\widetilde{\varphi}_0, \ldots, \widetilde{\varphi}_N$ in s_0 bezeichnet, finden wir holomorphe $\widetilde{\psi}_0, \ldots, \widetilde{\psi}_N : U_{s_0} \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ mit $\widetilde{\varphi}_i(s) = (s - s_0)^l \widetilde{\psi}_i(s)$, d. h. $\widetilde{\varphi}(s) = (s - s_0)^l \widetilde{\psi}(s)$ mit $\widetilde{\psi}(s_0) \neq 0$. Durch die Definition $\varphi(s_0) := \mathbb{P}(\widetilde{\psi}(s_0))$ wird $\varphi\,\big|_{U_{s_0}} = \mathbb{P}(\widetilde{\psi})$ in U_{s_0} holomorph, und wir erhalten die gewünschte Fortsetzung. Die Eindeutigkeit ergibt sich auf den Karten aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen. □

Wir erhalten damit auch gleichzeitig das

Korollar 2.3

Wenn zwei Kurven bis auf isolierte Punkte übereinstimmen, sind sie identisch.

2.2 Kurven in den Grassmannvarietäten

Bei einer Kurve in der Grassmannvarietät $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ wird jedem Punkt einer Riemannschen Fläche S ein n–dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{C}^N$ zugeordnet, d. h. die punktweisen Untersuchungen können mit Hilfe einfachster linearer Algebra durchgeführt werden. Es liegt nun nahe, so etwas wie „holomorph variierende Vektoren“ zu betrachten, also holomorphe Abbildungen $\widetilde{\varphi} : S \longrightarrow \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ mit $\widetilde{\varphi}(s) \in \Phi(s)$ für alle $s \in S$. Leider ist dies nur lokal möglich, denn global gibt es solche Abbildungen i. a. nicht. Dafür geeigneter sind die Leitkurven.

Definition

Die Kurve $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$ heißt Leitkurve von $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ genau dann, wenn $\varphi(s) \subseteq \Phi(s)$ für alle $s \in S$, kurz $\varphi \subseteq \Phi$.

Das obige $\widetilde{\varphi}$ wäre eine globale Liftung von φ, die es ja i. a. nicht gibt.

Trivialerweise spannen n linear unabhängige Vektoren einen n–dimensionalen Untervektorraum auf, ein analoges Resultat für Leitkurven ist die folgende Aussage.

Satz 2.4

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$ *Kurven, so daß ein* $s_0 \in S$ *existiert mit* $\dim \operatorname{span}\{\varphi_1(s_0), \ldots, \varphi_n(s_0)\} = n$*, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Kurve* $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ *mit* $\operatorname{span}\{\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)\} \subseteq \Phi(s)$ *für alle* $s \in S$*, wobei die Gleichheit bis auf isolierte Punkte gilt.*

Bezeichnung: $\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n := \Phi$

Wir wollen gleich eine Verallgemeinerung davon beweisen.

Satz 2.5

Seien $\Phi_i : S \longrightarrow \mathrm{G}(n_i, N)$ *für* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *Kurven mit* $0 \leq n_i \leq N$ *und* $n := \sum_{i=1}^{l} n_i \leq N$*, so daß ein* $s_0 \in S$ *existiert mit* $\dim \operatorname{span}\{\Phi_1(s_0), \ldots, \Phi_l(s_0)\} = n$*, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Kurve* $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ *mit* $\operatorname{span}\{\Phi_1(s), \ldots, \Phi_l(s)\} \subseteq \Phi(s)$ *für alle* $s \in S$*, wobei die Gleichheit bis auf isolierte Punkte gilt.*

Bezeichnung: $\Phi_1 \oplus \ldots \oplus \Phi_l := \Phi$

Wir benötigen für den Beweis noch eine Vorüberlegung.

Hilfssatz 2.6

Seien $\widetilde{\Phi_i} : U \longrightarrow \bigwedge^{n_i} \mathbb{C}^N$ *für* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *holomorph, wobei* U *eine offene Menge in* S *ist, dann ist auch* $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l} : U \longrightarrow \bigwedge^{n} \mathbb{C}^N$ *holomorph.*

Beweis Daß die $\widetilde{\Phi_i}$ holomorph sind, heißt per Definition, daß sie darstellbar sind als

$$\widetilde{\Phi_i} = \sum_{\substack{I_i \subseteq \{1, \ldots, N\} \\ \# I_i = n_i}} \alpha_{i, I_i} e_{I_i}$$

mit holomorphen $\alpha_{i,\,I_i} : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Somit ist auch

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi} &:= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \# I = n}} \alpha_I e_I := \widetilde{\Phi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l} \\
&= \left(\sum_{\substack{I_1 \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \# I_1 = n_1}} \alpha_{1,\,I_1} e_{I_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{\substack{I_l \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \# I_l = n_l}} \alpha_{l,\,I_l} e_{I_l} \right) \\
&= \sum_{\substack{I_1 \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \# I_1 = n_1}} \cdots \sum_{\substack{I_l \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ \# I_l = n_l}} \alpha_{1,\,I_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{l,\,I_l} (e_{I_1} \wedge \ldots \wedge e_{I_l})
\end{aligned}$$

holomorph, denn die α_I entstehen durch Multiplikation und Addition der $\alpha_{i,\,I_i}$. □

Beweis von Satz 2.5 Wir wählen eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von S, so daß erstens die U_j zusammenhängend und ganz in einer Karte enthalten sind, und zweitens die Φ_i auf allen U_j zu $\widetilde{\Phi_i}^j : U_j \longrightarrow \bigwedge^{n_i} \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ geliftet werden können. Nach dem Hilfssatz ist dann

$$\widetilde{\Phi}^j := \widetilde{\Phi_1}^j \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l}^j : U_j \longrightarrow \bigwedge^n \mathbb{C}^N$$

holomorph. Weiter gilt für $s \in U_j$ nach den Eigenschaften des Dachproduktes

$$\widetilde{\Phi}^j(s) = 0 \iff \dim \operatorname{span}\{\Phi_1(s), \ldots, \Phi_l(s)\} < n,$$

damit ist

$$\begin{aligned}
X &:= \{s \in S \mid \dim \operatorname{span}\{\Phi_1(s), \ldots, \Phi_l(s)\} < n\} \\
&= \{s \in S \mid \exists\, j \in J \text{ mit } s \in U_j \text{ und } \widetilde{\Phi}^j(s) = 0\} \\
&= \{s \in S \mid \forall\, j \in J \text{ mit } s \in U_j \text{ ist } \widetilde{\Phi}^j(s) = 0\}.
\end{aligned}$$

Wir behaupten nun, daß X isoliert in S ist.

Wenn $X \cap U_j$ einen Häufungspunkt hat, gilt $\widetilde{\Phi}^j \big|_{X \cap U_j} = 0$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen muß dann schon $\widetilde{\Phi}^j = 0$ sein, und daher $U_j \subseteq X$ gelten. Teilen wir jetzt die Menge J auf in

$$J_1 = \{j \in J \mid X \cap U_j \text{ hat keinen Häufungspunkt}\} \quad \text{und}$$
$$J_2 = J \setminus J_1 = \{j \in J \mid U_j \subseteq X\},$$

so können wir die offenen Mengen $V_1 := \bigcup_{j \in J_1} U_j$ und $V_2 := \bigcup_{j \in J_2} U_j$ definieren. Da nach Voraussetzung $s_0 \in V_1$ und S zusammenhängend ist, würde aus $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ folgen, daß $V_2 = \emptyset$, also auch $J_2 = \emptyset$, und damit die Behauptung.

Nehmen wir also an, daß $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, d. h. es gibt $j_1 \in J_1$ und $j_2 \in J_2$, so daß $U := U_{j_1} \cap U_{j_2} \neq \emptyset$. Wegen $U \subseteq X$ gilt $\widetilde{\Phi}^{j_1} |_U = 0$, und weil U offen ist, folgt $\widetilde{\Phi}^{j_1} = 0$, d. h. $U_{j_1} \subseteq X$. Widerspruch!

Nun konstruieren wir das Φ. Sei dafür $\Phi^j := \mathbb{P}(\widetilde{\Phi}^j \big|_{U_j \setminus X})$, da X isoliert ist, können wir Φ^j fortsetzen zu $\Phi^j : U_j \longrightarrow \mathrm{P}(\bigwedge^n \mathbb{C}^N)$. Weil $\Phi^j(s) \in \mathrm{G}(n, N)$ für $s \in U_j \setminus X$ und $\mathrm{G}(n, N)$ algebraisch ist, und damit auch abgeschlossen in der starken Topologie, gilt $\Phi^j : U_j \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$.

Wir setzen

$$\Phi(s) := \Phi^j(s) \text{ für } s \in U_j.$$

Dies ist wohldefiniert, falls $\Phi^j \big|_{U_j \cap U_k} = \Phi^k \big|_{U_j \cap U_k}$ für alle $j,\ k \in J$ ist. Dies ist aber klar, denn die Liftungen $\widetilde{\Phi_i}^j \big|_{U_j \cap U_k}$ und $\widetilde{\Phi_i}^k \big|_{U_j \cap U_k}$ von $\Phi_i \big|_{U_j \cap U_k}$ unterscheiden sich nach Satz 2.1 nur durch einen „holomorphen Faktor“ $\lambda_i : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbb{C}^*$, i. Z. $\widetilde{\Phi_i}^j \big|_{U_j \cap U_k} = \lambda_i \widetilde{\Phi_i}^k \big|_{U_j \cap U_k}$, folglich ist

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi_1}^j \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l}^j = (\lambda_1 \widetilde{\Phi_1}^k) \wedge \ldots \wedge (\lambda_l \widetilde{\Phi_l}^k) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_l (\widetilde{\Phi_1}^k \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l}^k) \\
&\quad \Longrightarrow \mathbb{P}(\widetilde{\Phi_1}^j \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l}^j \Big|_{U_j \cap U_k \setminus X}) = \mathbb{P}(\widetilde{\Phi_1}^k \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Phi_l}^k \Big|_{U_j \cap U_k \setminus X}) \\
&\quad \overset{\text{S 2.2}}{\Longrightarrow} \Phi^j \big|_{U_j \cap U_k} = \Phi^k \big|_{U_j \cap U_k}
\end{aligned}$$

Zum Abschluß müssen wir uns noch zeigen, daß $\Phi_i \subseteq \Phi$ auch in den fortgesetzten Punkten X gilt. Nach Satz 1.7 ist $\mathrm{F}(n_i, n, N)$ algebraisch, insbesondere also abgeschlossen in der starken Topologie, und da $(\Phi_i(s), \Phi(s)) \in \mathrm{F}(n_i, n, N)$ für alle $s \in S \setminus X$ ist, muß dies auf ganz S gelten (X isoliert).

Damit haben wir Φ konstruiert, für die Eindeutigkeit sorgt das Korollar 2.3, denn bis auf isolierte Punkte muß, wie wir oben gesehen haben, aus Dimensionsgründen $\Phi(s) = \mathrm{span}\{\Phi_1(s), \ldots, \Phi_l(s)\}$ gelten. $\square$

Damit ist das Problem, wie man zu n „linear unabhängigen“ Leitkurven eine Kurve in der $\mathrm{G}(n, N)$ findet, die diese umfaßt, gelöst. Nun zum umgekehrten Problem — zu einer Kurve in der $\mathrm{G}(n, N)$ suche man eine „Basis“ von Leitkurven.

Wir wollen hier gleich wieder eine verschärfte Version beweisen.

Satz 2.7

Seien $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ und $\Psi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n', N)$ Kurven, $0 \leq n' \leq n \leq N$, mit $\Psi \subseteq \Phi$. Weiter seien ein $s_0 \in S$ und $v_1, \ldots, v_{n-n'} \in \mathbb{C}^N$ gegeben mit $\Phi(s_0) = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_{n-n'}, \Psi(s_0)\}$.
Dann gibt es Kurven $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-n'} : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$ mit $v_i \in \varphi_i(s_0)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n - n'\}$ und

$$\Phi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_{n-n'} \oplus \Psi.$$

Für $\Psi = 0$ wird das oben angesprochene Problem gelöst, wobei man die „Basiskurven“ noch in einem Punkt vorgeben kann.

Beweis Für jedes $i \in \{1, \ldots, n - n'\}$ wähle man einen Untervektorraum $V_i < \mathbb{C}^N$ mit

1. $\dim V_i = N - n + 1$

2. $V_i \cap \Phi(s_0) = \mathbb{C} \cdot v_i$.

$\mathcal{D}\oplus : \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{G}(\mathcal{N} - \backslash, \mathcal{N})$ ist nach Satz 1.11 holomorph, und nach 2 ist

$\dim \operatorname{span}\{\mathcal{D}\oplus(\int_{\prime}), \mathcal{D}\mathcal{V}_{\rangle}\} = \mathcal{N} - \infty = (\mathcal{N} - \backslash) + (\backslash - \infty) = \dim \mathcal{D}\oplus + \dim \mathcal{D}\mathcal{V}_{\rangle}$,

somit kann $\mathcal{D}\oplus \oplus \mathcal{D}\mathcal{V}_{\rangle}$ gebildet werden, und

$$\varphi_i := \mathcal{D}(\mathcal{D}\oplus \oplus \mathcal{D}\mathcal{V}_{\rangle}) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{G}(\infty, \mathcal{N})$$

ist wiederum holomorph.

Nach Konstruktion ist

$$\operatorname{span}\{\varphi_1(s_0), \ldots, \varphi_{n-n'}(s_0), \Psi(s_0)\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{n-n'}, \Psi(s_0)\} = \Phi(s_0),$$

also können wir

$$\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_{n-n'} \oplus \Psi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$$

bilden. Wegen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-n'}, \Psi \subseteq \Phi$ folgt aus der Eindeutigkeit im vorherigen Satz

$$\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_{n-n'} \oplus \Psi = \Phi.$$

$\square$

Lokal betrachtet ergibt sich das

Korollar 2.8

Voraussetzungen wie oben.

Dann gibt es eine offene Umgebung U von s_0 und holomorphe Abbildungen $\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_{n-n'}} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ mit $\widetilde{\varphi}_i(s_0) = v_i$ für $i \in \{1, \ldots, n-n'\}$ und $\widetilde{\psi_1}, \ldots, \widetilde{\psi_{n'}} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$, so daß für $s \in U$

$$\Phi(s) = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}(s), \ldots, \widetilde{\varphi_{n-n'}}(s), \widetilde{\psi_1}(s), \ldots, \widetilde{\psi_{n'}}(s)\}.$$

Beweis Nach dem Satz ist

$$\Phi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_{n-n'} \oplus \Psi,$$

wobei wir noch fordern können, daß

$$\Phi(s_0) = \mathrm{span}\{\varphi_1(s_0), \ldots, \varphi_{n-n'}(s_0), \Psi(s_0)\}.$$

Wenn wir auch noch Ψ so in

$$\Psi = \psi_1 \oplus \ldots \oplus \psi_{n'}$$

zerlegen, daß

$$\Psi(s_0) = \mathrm{span}\{\psi_1(s_0), \ldots, \psi_{n'}(s_0)\},$$

erhalten wir

$$\Phi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_{n-n'} \oplus \psi_1 \oplus \ldots \oplus \psi_{n'}$$

und

$$\Phi(s_0) = \mathrm{span}\{\varphi_1(s_0), \ldots, \varphi_{n-n'}(s_0), \psi_1(s_0), \ldots, \psi_{n'}(s_0)\}.$$

Wenn $\overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_{n-n'}}, \widetilde{\psi_1}, \ldots, \widetilde{\psi_{n'}} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ die lokalen Liftungen um s_0 bezeichnen, sind $\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_{n-n'}}, \widetilde{\psi_1}, \ldots, \widetilde{\psi_{n'}}$ die gesuchten Abbildungen, wobei $\widetilde{\varphi_i} = \lambda_i \overline{\varphi_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, so daß $\lambda_i \overline{\varphi_i}(s_0) = v_i$.

Zum Schluß müssen wir nur noch U soweit verkleinern, daß auf ganz U gilt

$$\widetilde{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_{n-n'}} \wedge \widetilde{\psi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\psi_{n'}} \neq 0.$$

$\square$

Nach der Definiton der direkten Summe zweier Kurven ist es naheliegend zu fragen, wie die Summe zweier Kurven definiert wird.

Definition der Summe zweier Kurven

Seien $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ und $\Psi : S \longrightarrow \mathrm{G}(m, N)$ zwei Kurven und

$$k := \max_{s \in S} \dim \operatorname{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\}.$$

Für ein $s_0 \in S$ mit $\dim \operatorname{span}\{\Phi(s_0), \Psi(s_0)\} = k$ können wir Ψ nach Satz 2.7 so in Leitkurven $\psi_1, \ldots, \psi_m : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$ zerlegen, daß neben $\Psi = \psi_1 \oplus \ldots \oplus \psi_m$ auch $\operatorname{span}\{\psi_1(s_0), \ldots, \psi_m(s_0)\} = \Psi(s_0)$ gilt. Nach evtl. Umnumerierung der ψ_i können wir annehmen, daß

$$\operatorname{span}\{\Phi(s_0), \Psi(s_0)\} = \operatorname{span}\{\Phi(s_0), \psi_1(s_0), \ldots, \psi_{k-n}(s_0)\}.$$

Wir definieren

$$\Phi + \Psi := \Phi \oplus \psi_1 \oplus \ldots \oplus \psi_{k-n} : S \longrightarrow \mathrm{G}(k, N).$$

Für die Wohldefiniertheit reicht es nach Korollar 2.3 zu zeigen, daß

$$(\Phi \oplus \psi_1 \oplus \ldots \oplus \psi_{k-n})(s) = \operatorname{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\}$$

bis auf isolierte Punkte.

Nach Definition der direkten Summe ist

$$(\Phi \oplus \psi_1 \oplus \ldots \oplus \psi_{k-n})(s) = \operatorname{span}\{\Phi(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{k-n}(s)\}$$

bis auf isolierte Punkte, insbesondere ist dort

$$\dim \operatorname{span}\{\Phi(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{k-n}(s)\} = k = \max_{s \in S} \dim \operatorname{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\}.$$

Da trivialerweise

$$\operatorname{span}\{\Phi(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{k-n}(s)\} \subseteq \operatorname{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\},$$

muß daher auch

$$\text{span}\{\Phi(s), \psi_1(s), \ldots, \psi_{k-n}(s)\} = \text{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\}$$

bis auf isolierte Punkte gelten, damit folgt die Behauptung.

Insbesondere ist auch $\{s \in S \mid \dim \text{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\} < k\}$ isoliert.

Wir haben damit bewiesen:

Satz 2.9

Für zwei Kurven Φ und Ψ in den Grassmannvarietäten ist $\Phi + \Psi$ die eindeutig bestimmte Kurve mit

$$\Phi(s) + \Psi(s) = \text{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\} \subseteq (\Phi + \Psi)(s)$$

für alle $s \in S$, bei der die Gleichheit bis auf isolierte Punkte gilt.

Jetzt fehlt nur noch die

Definition des Durchschnitts zweier Kurven

Dies ist mit Hilfe der Dualität schnell erledigt. Für zwei Kurven Φ und Ψ sei

$$\Phi \cap \Psi := \mathcal{D}(\mathcal{D}\oplus + \mathcal{D}\ominus).$$

Die Dualisierung von Satz 2.9 liefert:

Satz 2.10

Für zwei Kurven Φ und Ψ in den Grassmannvarietäten ist $\Phi \cap \Psi$ die eindeutig bestimmte Kurve mit

$$\Phi(s) \cap \Psi(s) \supseteq (\Phi \cap \Psi)(s)$$

für alle $s \in S$, bei der die Gleichheit bis auf isolierte Punkte gilt.

Bezeichnung

Für eine Kurve $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ setzen wir $\dim \Phi := n$.

Für die Summe und den Durchschnitt der Kurven gelten die üblichen Eigenschaften.

Lemma 2.11

1. *Für drei Kurven Φ, Ψ und Υ gilt:*

   (a) *Wenn ein $s_0 \in S$ existiert mit* $\dim \operatorname{span}\{\Phi(s_0), \Psi(s_0), \Upsilon(s_0)\} = \dim \Phi(s_0) + \dim \Psi(s_0) + \dim \Upsilon(s_0)$ *ist*
   $(\Phi \oplus \Psi) \oplus \Upsilon = \Phi \oplus (\Psi \oplus \Upsilon) = \Phi \oplus \Psi \oplus \Upsilon.$

   (b) $(\Phi + \Psi) + \Upsilon = \Phi + (\Psi + \Upsilon) =: \Phi + \Psi + \Upsilon$

   (c) $(\Phi \cap \Psi) \cap \Upsilon = \Phi \cap (\Psi \cap \Upsilon) =: \Phi \cap \Psi \cap \Upsilon$

2. *Für zwei Kurven Φ und Ψ gilt:*

   (a) $\Phi + \Psi = \Psi + \Phi$

   (b) $\Phi \cap \Psi = \Psi \cap \Phi$

   (c) $\mathcal{D}\oplus + \mathcal{D}\ominus = \mathcal{D}(\oplus \cap \ominus)$

   (d) $\mathcal{D}\oplus \cap \mathcal{D}\ominus = \mathcal{D}(\oplus + \ominus)$

   (e) $\Phi \cap \Psi = 0 \implies \Phi \oplus \Psi$ *ist definiert und* $\Phi + \Psi = \Phi \oplus \Psi$

   (f) $\dim(\Phi \cap \Psi) + \dim(\Phi + \Psi) = \dim \Phi + \dim \Psi$

Beweis Da bis auf isolierte Punkte

$$\Phi(s) + \Psi(s) = (\Phi + \Psi)(s) \quad \text{bzw.} \quad \Phi(s) \cap \Psi(s) = (\Phi \cap \Psi)(s)$$

gilt, folgen die Behauptungen mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussagen aus den entsprechenden Regeln für Untervektorräume. $\square$

Wir wollen uns noch überlegen, daß es an den Schnitt und die Summe angepaßte Leitkurven von Φ und Ψ gibt.

Lemma 2.12

Seien $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ *und* $\Psi : S \longrightarrow \mathrm{G}(m, N)$ *zwei Kurven und* $l := n + m - \dim(\Phi + \Psi) = \dim(\Phi \cap \Psi)$.

Dann existieren $\rho_1, \ldots, \rho_l, \varphi_{l+1}, \ldots, \varphi_n, \psi_{l+1}, \ldots, \psi_m : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$, *so daß*

1. $\Phi = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_l \oplus \varphi_{l+1} \oplus \ldots \oplus \varphi_n$
2. $\Psi = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_l \oplus \psi_{l+1} \oplus \ldots \oplus \psi_m$
3. $\Phi \cap \Psi = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_l$
4. $\Phi + \Psi = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \ \rho_l \oplus \varphi_{l+1} \oplus \ldots \oplus \varphi_n \oplus \psi_{l+1} \oplus \ldots \oplus \psi_m$

Beweis Nach Satz 2.7 können wir Φ und Ψ zerlegen in

$$\Phi = (\Phi \cap \Psi) \oplus \varphi_{l+1} \oplus \ldots \oplus \varphi_n \quad \text{bzw.} \quad \Psi = (\Phi \cap \Psi) \oplus \psi_{l+1} \oplus \ldots \oplus \psi_m.$$

Wenn wir noch $\Phi \cap \Psi$ zerlegen, erhalten wir 1, 2 und 3. Aus Dimensionsgründen folgt dann 4. □

Beispiel

Schon ein ganz einfaches Beispiel reicht aus, um zu sehen, was in den isolierten Punkten passiert.

$$\text{Sei } \Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{G}(1,2) \\ s & \longmapsto & \operatorname{span}\left\{\binom{1}{s}\right\} \end{array} \quad \text{und} \quad \Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{G}(1,2) \\ s & \longmapsto & \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} s^2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{array}$$

Für $s = 0$ ist $\Phi(0) = \mathbb{C} \cdot \binom{1}{0}$, $\Psi(0) = \mathbb{C} \cdot \binom{0}{1}$ und $\operatorname{span}\{\Phi(0), \Psi(0)\} = \mathbb{C}^2$, und damit $\Phi + \Psi = \mathbb{C}^2$, aber

$$\operatorname{span}\{\Phi(s), \Psi(s)\} = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \binom{1}{1} & \text{für } s = 1 \\ \mathbb{C}^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

erreicht für $s = 1$ nicht die Dimension 2, hier wird bei $\Phi + \Psi$ vergrößert. Beim Schnitt ist es genau umgekehrt:

$$\mathcal{D}\oplus(\int) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -\int \\ \infty \end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}\ominus(\int) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \infty \\ -\int^{\in} \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \mathcal{D}\oplus + \mathcal{D}\ominus = \mathbb{C}^{\in} \\ &\Longrightarrow \Phi \cap \Psi = \mathcal{D}(\mathcal{D}\oplus + \mathcal{D}\ominus) = \prime. \end{aligned}$$

Für $\Phi(s) \cap \Psi(s)$ gilt jedoch

$$\Phi(s) \cap \Psi(s) = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \binom{1}{1} & \text{für } s = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beim Schnitt $\Phi \cap \Psi$ wird also in $s = 1$ verkleinert.

2.3 Das Fundamentallemma

Zum Abschluß dieses Kapitels stellen wir noch ein für das nächste Kapitel unverzichtbares Lemma bereit. Dieses besagt im wesentlichen, daß, wenn Liftungen einer Basis von Leitkurven $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von Φ und eine Liftung einer weiteren Leitkurve ψ von Φ gegeben sind, diese nicht nur punktweise linear abhängig sind, sondern daß diese lineare Abhängigkeit auch holomorph gemacht werden kann.

Lemma 2.13

Sei $s_0 \in U \subseteq S$ *und* $\widetilde{\varphi_1}, \dots, \widetilde{\varphi_n}, \widetilde{\psi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *holomorph, so daß*

1. $\widetilde{\varphi_1}(s), \dots, \widetilde{\varphi_n}(s)$ *linear unabhängig für* $s \in U \setminus \{s_0\}$

2. $\widetilde{\psi}(s) \in \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}(s), \dots, \widetilde{\varphi_n}(s)\}$ *für* $s \in U \setminus \{s_0\}$.

Dann gibt es eine Umgebung $\widetilde{U} \subseteq U$ *von* s_0 *und holomorphe Funktionen* $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\beta(s) \neq 0$ *für* $s \in \widetilde{U} \setminus \{s_0\}$, *so daß auf* $\widetilde{U}$ *gilt*

$$\beta\widetilde{\psi} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{\varphi}_i = 0.$$

Zusatz: *Sind sogar* $\widetilde{\varphi_1}(s_0), \dots, \widetilde{\varphi_n}(s_0)$ *linear unabhängig, so kann* $\beta = -1$ *gewählt werden, d. h.*

$$\widetilde{\psi} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{\varphi}_i.$$

Beweis

1. Schritt Zeige: Es gibt eine Umgebung $\widetilde{U} \subseteq U$ von s_0 und $v_{n+1}, \dots, v_N \in \mathbb{C}^N$ mit $\widetilde{\varphi_1}, \dots, \widetilde{\varphi_n}, v_{n+1}, \dots, v_N$ linear unabhängig auf $\widetilde{U} \setminus \{s_0\}$.

$\widetilde{\Phi} = \widetilde{\varphi_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{\varphi_n}$ hat höchstens eine isolierte Nullstelle bei s_0, damit kann $\Phi := \mathbb{P}(\widetilde{\Phi}\,\big|_{U\setminus\{s_0\}})$ in s_0 hinein zu $\Phi : U \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ fortgesetzt werden. Wir wählen jetzt $v_{n+1}, \dots, v_N \in \mathbb{C}^N$ so, daß $\operatorname{span}\{\Phi(s_0), v_{n+1}, \dots, v_N\} = \mathbb{C}^N$. Nach Satz 2.5 kann dann $\Phi \oplus \mathbb{P}(v_{n+1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{P}(v_N) = \mathbb{C}^N$ auf einer zusammenhängenden Umgebung $\widetilde{U} \subseteq U$ von s_0 gebildet werden, woraus folgt, daß $\widetilde{\varphi_1}(s), \dots, \widetilde{\varphi_n}(s), v_{n+1}, \dots, v_N$ linear unabhängig sind für $s \in \widetilde{U} \setminus X$, X isoliert. Wir verkleinern $\widetilde{U}$ soweit, daß $\widetilde{U} \cap X \subseteq \{s_0\}$.

2. Schritt Betrachte

$$A(s) := \left(\begin{array}{c} \widetilde{\psi}(s)\ \widetilde{\varphi_1}(s) \dots \widetilde{\varphi_n}(s)\ v_{n+1} \dots v_N \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 \end{array} \right) \in \mathrm{M}((N+1) \times (N+1), \mathbb{C}),$$

dann ist $\det A = 0$ und

$$(\text{adj } A(s))^{\mathrm{T}} = \left(\frac{0}{\beta(s)\,\alpha_1(s)\ldots\alpha_N(s)} \right),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= (-1)^N \det\left(\widetilde{\varphi_1}(s)\ldots\widetilde{\varphi_n}(s)\, v_{n+1}\ldots v_N\right),\\
\alpha_i(s) &= (-1)^{N+i} \det\left(\widetilde{\psi}(s)\,\widetilde{\varphi_1}(s)\ldots\widetilde{\varphi_{i-1}}(s)\,\widetilde{\varphi_{i+1}}(s)\ldots\widetilde{\varphi_n}(s)\, v_{n+1}\ldots v_N\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } i \in \{1,\ldots,n\},\\
\alpha_i(s) &= (-1)^{N+i} \det\left(\widetilde{\psi}(s)\,\widetilde{\varphi_1}(s)\ldots\widetilde{\varphi_n}(s)\, v_{n+1}\ldots v_{i-1}\, v_{i+1}\ldots v_N\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } i \in \{n+1,\ldots,N\},
\end{aligned}$$

damit sind sie auch holomorph. Nach dem 1. Schritt ist $\beta(s) \neq 0$ für $s \in U \setminus \{s_0\}$.

Nach der Cramerschen Regel gilt

$$0 = \det A(s) \cdot \mathrm{E}_{N+1} = A(s) \cdot \text{adj } A(s),$$

also insbesondere

$$\beta(s) \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}(s) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s) \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_i(s) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=n+1}^{N} \alpha_i(s) \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \beta\widetilde{\psi} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{\varphi}_i + \sum_{i=n+1}^{N} \alpha_i v_i = 0,$$

da $\text{span}\{\widetilde{\psi}(s), \widetilde{\varphi_1}(s), \ldots, \widetilde{\varphi_n}(s)\} \cap \text{span}\{v_{n+1}, \ldots, v_N\} = 0$ für $s \in \widetilde{U} \setminus \{s_0\}$, folgt $\alpha_{n+1} = \ldots = \alpha_N = 0$ auf $\widetilde{U} \setminus \{s_0\}$ und damit auch auf ganz $\widetilde{U}$. Wir erhalten somit die gewünschte Gleichung

$$\beta\widetilde{\psi} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{\varphi}_i = 0.$$

Für den Beweis des Zusatzes sei nun auch $\widetilde{\varphi_1}(s_0), \ldots, \widetilde{\varphi_n}(s_0)$ linear unabhängig. Wir definieren $l := \min\{\mathrm{ord}_{s_0}\beta, \mathrm{ord}_{s_0}\alpha_1, \ldots, \mathrm{ord}_{s_0}\alpha_n\}$, dann können wir $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch $(s - s_0)^l$ teilen. Sei dies ohne Einschränkung schon geschehen. Mindestens einer der $\beta(s_0), \alpha_1(s_0), \ldots, \alpha_n(s_0)$ ist also ungleich 0, und da $\widetilde{\varphi_1}(s_0), \ldots, \widetilde{\varphi_n}(s_0)$ linear unabhängig sind, gilt auf jeden Fall $\beta(s_0) \neq 0$, d. h. β hat in $\widetilde{U}$ keine Nullstelle. Wir können daher durch β dividieren und erhalten

$$\widetilde{\psi} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\alpha_i}{\beta} \widetilde{\varphi}_i.$$

□

Kapitel 3

Die Normalform

In diesem Kapitel werden wir die Normalform herleiten, bevor wir diese jedoch formulieren und beweisen können, müssen wir zwei von einer Kurve Φ abgeleitete Kurven kennenlernen.

3.1 Die Kurven $\Phi + \Phi'$ und $\Phi \cap \Phi'$

Um eine Kurve weiter untersuchen zu können, versuchen wir ein Maß dafür zu erhalten, wie stark sich der Vektorraum $\Phi(s)$ bewegt.

Bei einer holomorphen Abbildung $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ (U zusammenhängendes Kartengebiet) leistet die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}}{\mathrm{d}s}$ bezüglich einer Karte (U, s) etwas Ähnliches, denn es gilt zum Beispiel: $\frac{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}}{\mathrm{d}s} = 0 \iff \widetilde{\varphi} = const$. Bei Benutzung einer anderen Karte $(U, \overline{s})$ ergibt sich $\frac{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}}{\mathrm{d}\overline{s}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}}$, wobei $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}}(u) \neq 0$ für alle $u \in U$. Dieser holomorphe Faktor ist für uns ohne Interesse, da wir nur mit Liftungen von Leitkurven arbeiten, die ohnehin nur bis auf einen holomorphen Faktor eindeutig sind. Wir vereinbaren daher, daß $'$ die Ableitung nach einer passenden Karte bezeichnet.

Eine erste naheliegende Idee, etwas ähnlich Aussagekräftiges für eine Kurve $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n,N)$ zu erhalten, ist die folgende:

Stelle Φ lokal als $\Phi = \mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1},\dots,\widetilde{\varphi_n}\}$ dar mit $\widetilde{\varphi_1},\dots,\widetilde{\varphi_n} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, und betrachte dann $\mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1}',\dots,\widetilde{\varphi_n}'\}$.

Dies führt aber schnell zu Problemen.

Beispiel

Sei $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{G}(n,N)$ konstant, d. h. $\Phi = V = \mathrm{span}\{v_1,\dots,v_n\}$. Dann erhalten wir $\mathrm{span}\{v_1',\dots,v_n'\} = 0$, was wir auch erreichen wollten.

Wählen wir jetzt andere Leitkurven $\Phi(s) = V = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^s v_1,\dots,\mathrm{e}^s v_n\}$, dann ist $\mathrm{span}\{(\mathrm{e}^s v_1)',\dots,(\mathrm{e}^s v_n)'\} = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^s v_1,\dots,\mathrm{e}^s v_n\} = V$.

Unser Ansatz war also noch nicht einmal wohldefiniert, aber wir erkennen, daß

$$V = \mathrm{span}\{v_1,\dots,v_n,v_1',\dots,v_n'\} = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^s v_1,\dots,\mathrm{e}^s v_n,(\mathrm{e}^s v_1)',\dots,(\mathrm{e}^s v_n)'\},$$

und genau dies werden wir ausnutzen.

Definition von $\Phi + \Phi'$

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n,N)$ eine Kurve. Wir werden $\Phi + \Phi'$ zuerst lokal definieren. Nach Korollar 2.8 gibt es eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von S mit

1. Die U_j sind zusammenhängend und ganz in einer Kartenumgebung enthalten.

2. Für jedes $j \in J$ existieren holomorphe $\widetilde{\varphi_1}^j,\dots,\widetilde{\varphi_n}^j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^N$, so daß $\Phi\big|_{U_j} = \mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1}^j,\dots,\widetilde{\varphi_n}^j\}$.

Wir setzen $V_s^j := \mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1}^j(s),\dots,\widetilde{\varphi_n}^j(s),\widetilde{\varphi_1}^{j\prime}(s),\dots,\widetilde{\varphi_n}^{j\prime}(s)\}$ für $s \in U_j$ und nehmen uns jeweils ein $s_j \in U_j$ mit $\dim V_{s_j}^j = \max_{s\in U_j} \dim V_s^j =: n+r_j$.

Nach evtl. Umnumerierung ist

$$V_{s_j}^j = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}^j(s_j), \ldots, \widetilde{\varphi_n}^j(s_j), \widetilde{\varphi_1}^{j\prime}(s_j), \ldots, \widetilde{\varphi_{r_j}}^{j\prime}(s_j)\},$$

und somit ist

$$X_j := \{s \in U_j \mid \widetilde{\varphi_1}^j(s) \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n}^j(s) \wedge \widetilde{\varphi_1}^{j\prime}(s) \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_{r_j}}^{j\prime}(s) = 0\}$$

isoliert. Wir können nun $(\Phi + \Phi')^j : U_j \longrightarrow \mathrm{G}(n + r_j, N)$ als die eindeutige holomorphe Fortsetzung von $\mathbb{P}(\widetilde{\varphi_1}^j \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n}^j \wedge \widetilde{\varphi_1}^{j\prime} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_{r_j}}^{j\prime}\Big|_{U_j \setminus X_j})$ definieren.

Um $(\Phi + \Phi')(s) := (\Phi + \Phi')^j(s)$ für $s \in U_j$ setzen zu können, müssen wir zeigen, daß die $(\Phi + \Phi')^j$ auf den Schnitten der U_j übereinstimmen, insbesondere $r_j = r_k$ für $j, k \in J$. Wir geben dafür eine von der Auswahl der $\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}$ unabhängige Darstellung von $(\Phi + \Phi')^j$ auf $U_j \setminus X_j$ an, daraus folgt, daß $(\Phi + \Phi')^j$ und $(\Phi + \Phi')^k$ auf $(U_j \cap U_k) \setminus (X_j \cup X_k)$ übereinstimmen und damit nach Korollar 2.3 auf ganz $U_j \cap U_k$.

Für $\widehat{s} \in U_j \setminus X_j$ gilt

$(\Phi + \Phi')^j(\widehat{s}) = \{v \in \mathbb{C}^N \mid \exists\, \widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $\widetilde{U} \subseteq U_j$ offene Umgebung von $\widehat{s}$, mit $\widetilde{\varphi} \in \Phi$ und $\widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) = v\} =: \tau_{\hat{s}}$

Für die Gleichheit sind zwei Inklusionen zu zeigen:

„$\subseteq$“: Da $\tau_{\hat{s}}$ offensichtlich ein Untervektorraum ist, reicht es zu zeigen, daß $\widetilde{\varphi}_i^j(\widehat{s}), \widetilde{\varphi}_i^{j\prime}(\widehat{s}) \in \tau_{\hat{s}}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Wegen $\widetilde{\varphi}_i^j \in \Phi$ folgt $\widetilde{\varphi}_i^{j\prime}(\widehat{s}) \in \tau_{\hat{s}}$. Um zu zeigen, daß $\widetilde{\varphi}_i^j(\widehat{s}) \in \tau_{\hat{s}}$, definieren wir $\widetilde{\psi}_i^j(s) := (s - \widehat{s})\widetilde{\varphi}_i^j(s)$, dann ist $\widetilde{\psi}_i^j \in \Phi$ und

$$\widetilde{\psi}_i^{j\prime}(\widehat{s}) = (\widehat{s} - \widehat{s})\widetilde{\varphi}_i^{j\prime}(\widehat{s}) + 1\widetilde{\varphi}_i^j(\widehat{s}) = \widetilde{\varphi}_i^j(\widehat{s}).$$

„$\supseteq$": Sei $v \in \tau_{\hat{s}}$, d. h. es existieren $\widetilde{U} \subseteq U_j$ und $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ mit $\widetilde{\varphi} \in \Phi$ und $\widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) = v$, also insbesondere $\widetilde{\varphi} \in \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}^j, \ldots, \widetilde{\varphi_n}^j\}$, somit folgt nach dem Fundamentallemma , daß $\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \widetilde{\varphi}_i^j$ mit $\alpha_i : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ($\widetilde{U}$ evtl. verkleinert). Damit ist

$$v = \widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(\widehat{s}) \widetilde{\varphi}_i^j(\widehat{s}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\widehat{s}) \widetilde{\varphi}_i^{j\prime}(\widehat{s}),$$

da aus Dimensionsgründen

$$\widetilde{\varphi}_i^{j\prime}(\widehat{s}) \in \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}^j(\widehat{s}), \ldots, \widetilde{\varphi_n}^j(\widehat{s}), \widetilde{\varphi_1}^{j\prime}(\widehat{s}), \ldots, \widetilde{\varphi_{r_j}}^{j\prime}(\widehat{s})\}$$

für $i \in \{r_j + 1, \ldots, n\}$, folgt

$$v \in \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}^j(\widehat{s}), \ldots, \widetilde{\varphi_n}^j(\widehat{s}), \widetilde{\varphi_1}^{j\prime}(\widehat{s}), \ldots, \widetilde{\varphi_{r_j}}^{j\prime}(\widehat{s})\} = (\Phi + \Phi')^j(\widehat{s}).$$

$\square$

Nach Griffiths und Harris ([G/H1]) kann $(\Phi + \Phi')(s)$ anschaulich als Summe von $\Phi(s)$ mit dem „unendlich–nahen Untervektorraum" gedeutet werden.

Mit dieser Konstruktion können wir nun testen, ob eine Kurve konstant ist.

Hilfssatz 3.1

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ *eine Kurve, dann gilt*

$$\Phi \text{ konstant } \iff \Phi + \Phi' = \Phi.$$

Beweis Wenn Φ konstant ist, $\Phi = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, können wir $v_1, \ldots, v_n$ als global geliftete Leitkurven betrachten, und wir erhalten

$$\Phi + \Phi' = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n, v_1', \ldots, v_n'\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \Phi.$$

Für die Umkehrung stellen wir Φ lokal als $\Phi = \mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}\}$ mit holomorphen Abbildungen $\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ dar, damit ist

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n} : U \longrightarrow \bigwedge\nolimits^n \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$$

eine Liftung von Φ. Das Ableiten ergibt

$$\widetilde{\Phi}' = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_{i-1}} \wedge \widetilde{\varphi_i}' \wedge \widetilde{\varphi_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n}.$$

Wegen $\widetilde{\varphi_i}' \in \Phi$, also $\widetilde{\varphi_i}' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \widetilde{\varphi_j}$ mit holomorphen $\alpha_i^j : U \longrightarrow \mathbb{C}$ (U evtl. verkleinert), gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}' &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_{i-1}} \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \widetilde{\varphi_j} \right) \wedge \widetilde{\varphi_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i \right) \widetilde{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i \right) \widetilde{\Phi}.
\end{aligned}$$

Bezüglich der Standardbasis des $\bigwedge^n \mathbb{C}^N$ ist dies $\binom{N}{n}$–mal die gleiche lineare Differentialgleichung, somit unterscheiden sich die Lösungen nur um einen konstanten Faktor. Wir erhalten $\widetilde{\Phi} = \beta\omega$ mit $\beta : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\omega \in \bigwedge^n \mathbb{C}^N$, da $\widetilde{\Phi} \neq 0$ auf ganz U und $\Phi = \mathbb{P}(\widetilde{\Phi}) : U \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ gilt, ist ω zerlegbar in $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge^n \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$, damit ist $\Phi|_U = \mathbb{P}(\omega) = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, d. h. Φ ist lokal konstant. Wenn wir jetzt noch berücksichtigen, daß S zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. $\square$

Wir wollen nun Kurven im projektiven Raum $\mathbb{P}_{N-1} = \mathrm{G}(1, N)$ untersuchen.

Definition

Für eine Kurve $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{G}(1,N)$ definieren wir induktiv

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &:= \varphi \\ \varphi^{(k+1)} &:= \varphi^{(k)} + \varphi^{(k)\prime} \quad \text{für } k \geq 0. \end{aligned}$$

Im Falle $\dim \varphi^{(k)} = k+1$ heißt $\varphi^{(k)}$ die k–te assoziierte Kurve von φ.

Man beachte, daß $\widetilde{\varphi}^{(k)}$ für eine holomorphe Abbildung $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ die k–te Ableitung bezeichnet.

Bemerkung

Lokal gilt, falls $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ eine Liftung von φ ist,

$$\varphi^{(k)} = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}', \widetilde{\varphi}'', \ldots, \widetilde{\varphi}^{(k)}\}$$

bis auf isolierte Punkte.

Wenn wir φ als $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}_{N-1}$ auffassen, dann gibt die erste assoziierte Kurve die Tangente an, die zweite die Schmiegebene, usw.

Wir wissen bereits, daß φ genau dann konstant ist, wenn $\dim \varphi^{(1)} = 1$. Man kann an den $\varphi^{(k)}$ aber sogar ablesen, wie groß der Raum ist, den φ durchläuft.

Definition

Sei $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{G}(1,N)$ eine Kurve, dann heißt $\operatorname{span}\{\varphi(s) \mid s \in S\}$ der von φ aufgespannte Raum, und wir setzen $\mathrm{d}(\varphi) := \dim \operatorname{span}\{\varphi(s) \mid s \in S\}$.

Lemma 3.2

Für eine Kurve $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{G}(1,N)$ gilt

$$\mathrm{d}(\varphi) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \dim \varphi^{(k)} \neq k+1\}.$$

Beweis Sei $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \dim \varphi^{(k)} \neq k+1\}$, dann ist

$$\varphi^{(k_0)} = \varphi^{(k_0-1)} + \varphi^{(k_0-1)\prime} = \varphi^{(k_0-1)}.$$

Nach dem Hilfssatz 3.1 ist damit $\varphi^{(k_0-1)} = const. =: V$. Aus $\varphi \subseteq \varphi^{(k_0-1)} = V$ folgt $\mathrm{d}(\varphi) \leq \dim V = k_0$.

Nehmen wir jetzt an, daß das Bild von φ ganz in einem echten Untervektorraum W von V läge. Wir behaupten, daß dann auch $\varphi^{(k)} \subseteq W$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dies ist ein Widerspruch zu $\dim \varphi^{(k_0-1)} = k_0$. Sei $W = \mathrm{V}(F_1, \ldots, F_{N-\dim W})$, wobei die F_i Linearformen auf dem $\mathbb{C}^N$ sind. Für ein beliebiges $s \in S$ wählen wir eine lokale Liftung $\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ von φ um s, dann ist

$$F_i(\widetilde{\varphi}) = 0 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, N - \dim W\}.$$

Durch k–faches Ableiten erhalten wir

$$F_i(\widetilde{\varphi}^{(k)}) = 0 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, N - \dim W\}$$

$$\iff \widetilde{\varphi}^{(k)} \in W.$$

Aus $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}', \widetilde{\varphi}'', \ldots, \widetilde{\varphi}^{(k)} \in W$ auf U folgt $\varphi^{(k)}|_U \subseteq W$ bis auf isolierte Punkte, damit gilt es aber auf ganz U, insbesondere $\varphi^{(k)}(s) \subseteq W$. Da s beliebig war, ist also $\varphi^{(k)} \subseteq W$. $\square$

Als nächstes wollen wir $\Phi \cap \Phi'$ definieren, anschaulich ist $(\Phi \cap \Phi')(s)$ — wieder nach [G/H1] — der Schnitt von $\Phi(s)$ mit dem „unendlich–nahen Untervektorraum“.

Wir könnten $\Phi \cap \Phi'$ analog zum Schnitt zweier Kurven als

$$\Phi \cap \Phi' := \mathcal{D}((\mathcal{D}\oplus) + (\mathcal{D}\oplus)')$$

definieren. Dies hat jedoch den Nachteil, daß wir keine Vorstellung davon haben, wie $\Phi \cap \Phi'$ mit Φ zusammenhängt. Wir wählen daher einen anderen Weg zur Definition von $\Phi \cap \Phi'$ und beweisen die obige „Definition" als Satz.

Wir zeigen zuerst die lokale Existenz besonders „schöner" lokaler Leitkurven.

Lemma 3.3

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$, $s_0 \in S$ und $r := \dim(\Phi + \Phi') - \dim \Phi$.
Dann existieren eine offene Umgebung U von s_0 und $\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, so daß

1. $\Phi = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}\}$ *auf* $U \setminus \{s_0\}$
2. $\widetilde{\varphi_{r+1}}', \ldots, \widetilde{\varphi_n}' \in \Phi$
3. $\Phi + \Phi' = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}, \widetilde{\varphi_1}', \ldots, \widetilde{\varphi_r}'\}$ *auf* $U \setminus \{s_0\}$*, insbesondere sind* $\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}, \widetilde{\varphi_1}', \ldots, \widetilde{\varphi_r}'$ *linear unabhängig auf* $U \setminus \{s_0\}$*.*

Beweis Wir stellen Φ lokal um s_0 als $\Phi = \operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_n}\}$ mit holomorphen $\overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_n} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ dar. Dann hat $\operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_n}, \overline{\varphi_1}', \ldots, \overline{\varphi_n}'\}$ bis auf isolierte Punkte die Dimension $n+r$. Nach evtl. Umnumerierung und Verkleinern von U können wir

$$\operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}(s), \ldots, \overline{\varphi_n}(s), \overline{\varphi_1}'(s), \ldots, \overline{\varphi_n}'(s)\} = \\ = \operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}(s), \ldots, \overline{\varphi_n}(s), \overline{\varphi_1}'(s), \ldots, \overline{\varphi_r}'(s)\}$$

und

$$\dim \operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}(s), \ldots, \overline{\varphi_n}(s), \overline{\varphi_1}'(s), \ldots, \overline{\varphi_r}'(s)\} = n + r$$

für alle $s \in U \setminus \{s_0\}$ annehmen.

Wir setzen $\widetilde{\varphi}_i := \overline{\varphi_i}$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$ und für $i \in \{r+1, \ldots, n\}$ konstruieren wir die $\widetilde{\varphi}_i$ wie folgt:

Da $\overline{\varphi_i}' \in \operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_n}, \overline{\varphi_1}', \dots, \overline{\varphi_r}'\}$ auf $U \setminus \{s_0\}$, gibt es nach dem Fundamentallemma $\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n, \beta_i^1, \dots, \beta_i^r, \gamma_i : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph (U evtl. verkleinert), $\gamma_i(s) \neq 0$ für $s \in U \setminus \{s_0\}$, mit

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \overline{\varphi_j} + \sum_{j=1}^{r} \beta_i^j \overline{\varphi_j}' + \gamma_i \overline{\varphi_i}' = 0.$$

Setze

$$\widetilde{\varphi_i} := \sum_{j=1}^{r} \beta_i^j \overline{\varphi_j} + \gamma_i \overline{\varphi_i},$$

damit ist

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi_i}' &= \sum_{j=1}^{r} \left(\beta_i^{j\prime} \overline{\varphi_j} + \beta_i^j \overline{\varphi_j}' \right) + \gamma_i' \overline{\varphi_i} + \gamma_i \overline{\varphi_i}' \\
&= \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_i^j \overline{\varphi_j}' + \gamma_i \overline{\varphi_i}' \right) + \sum_{j=1}^{r} \beta_i^{j\prime} \overline{\varphi_j} + \gamma_i' \overline{\varphi_i} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \overline{\varphi_j} + \sum_{j=1}^{r} \beta_i^{j\prime} \overline{\varphi_j} + \gamma_i' \overline{\varphi_i} \in \Phi.
\end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen:

$$\operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \dots, \widetilde{\varphi_n}\} = \operatorname{span}\{\overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_n}\} \text{ auf } U \setminus \{s_0\}.$$

Die Inklusion „$\subseteq$“ ist klar nach Definition der $\widetilde{\varphi_i}$. Für die andere Inklusion bemerken wir, daß $\widetilde{\varphi_i} := \overline{\varphi_i}$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ und für $i \in \{r+1, \dots, n\}$ ist

$$\widetilde{\varphi_i} = \sum_{j=1}^{r} \beta_i^j \overline{\varphi_j} + \gamma_i \overline{\varphi_i}$$

$$\Longrightarrow \gamma_i \overline{\varphi_i} = \widetilde{\varphi_i} - \sum_{j=1}^{r} \beta_i^j \widetilde{\varphi_j}.$$

Da $\gamma_i(s) \neq 0$ für $s \in U \setminus \{s_0\}$, $i \in \{r+1, \ldots, n\}$, folgt die Behauptung. $\square$

Das Lemma führt direkt zur

Definition von $\Phi \cap \Phi'$

Mit den Bezeichnungen des Lemmas erklären wir $\Phi \cap \Phi'$ zuerst lokal als die holomorphe Fortsetzung von $\mathbb{P}(\widetilde{\varphi_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\varphi_n}\,\big|_{U\setminus\{s_0\}})$, wir erhalten

$$\Phi \cap \Phi' : U \longrightarrow \mathrm{G}(n-r, N).$$

Um zu zeigen, daß alle auf diese Weise, für beliebige $s_0 \in S$, erhaltenen lokalen Kurven zusammenpassen und damit die ganze Kurve

$$\Phi \cap \Phi' : S \longrightarrow \mathrm{G}(n-r, N)$$

zu bekommen, geben wir eine von den $\widetilde{\varphi_{r+1}}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}$ unabhängige Darstellung von $\Phi \cap \Phi'$ an.

Für $\widehat{s} \in U \setminus \{s_0\}$ gilt

$(\Phi \cap \Phi')(\widehat{s}) = \{v \in \mathbb{C}^N \mid \exists\, \widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $\widetilde{U} \subseteq U$ offene Umgebung von s_0, mit $\widetilde{\varphi} \in \Phi,\ \widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) \in \Phi(\widehat{s}),\ \widetilde{\varphi}(\widehat{s}) = v\} =: \sigma_{\hat{s}}$

Wir zeigen die beiden Inklusionen:

„$\subseteq$": Trivial, da $\sigma_{\hat{s}}$ ein Untervektorraum ist und $\widetilde{\varphi_{r+1}}', \ldots, \widetilde{\varphi_n}' \in \Phi \Longrightarrow \widetilde{\varphi_{r+1}}'(\widehat{s}), \ldots, \widetilde{\varphi_n}'(\widehat{s}) \in \Phi(\widehat{s})$, also $\widetilde{\varphi_{r+1}}(\widehat{s}), \ldots, \widetilde{\varphi_n}(\widehat{s}) \in \sigma_{\hat{s}}$.

„$\supseteq$": Sei $v \in \sigma_{\hat{s}}$, d. h. es existiert $\widetilde{U}$ Umgebung von $\widehat{s}$ (o. E. $s_0 \notin \widetilde{U}$), $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\widetilde{\varphi} \in \Phi$, $\widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) \in \Phi(\widehat{s})$ und $\widetilde{\varphi}(\widehat{s}) = v$, insbesondere ist

$$\widetilde{\varphi} \in \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \ldots, \widetilde{\varphi_n}\}.$$

Nach Fundamentallemma gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei $\widetilde{U}$ evtl. verkleinert wird, so daß

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{\varphi}_i.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$\widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(\widehat{s})\widetilde{\varphi}_i(\widehat{s}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\widehat{s})\widetilde{\varphi}_i{}'(\widehat{s}).$$

Da $\widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) \in \Phi(\widehat{s})$ sein soll, folgt aus unserer speziellen Wahl der $\widetilde{\varphi}_i$ (vgl. Lemma 3.3), daß $\alpha_i(\widehat{s}) = 0$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$, also

$$v = \widetilde{\varphi}(\widehat{s}) = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i(\widehat{s})\widetilde{\varphi}_i(\widehat{s}) \in (\Phi \cap \Phi')(\widehat{s}).$$

□

Lemma 3.4

Für eine Kurve Φ in einer Grassmannvarietät gilt

$$\dim(\Phi + \Phi') + \dim(\Phi \cap \Phi') = 2 \dim \Phi.$$

Beweis Unmittelbare Konsequenz aus den Definitionen. □

Wir verbinden nun beide Konstruktionen.

Hilfssatz 3.5

Für eine Kurve Φ gilt:

1. $(\Phi \cap \Phi') + (\Phi \cap \Phi')' \subseteq \Phi$
2. $\dim((\Phi \cap \Phi') + (\Phi \cap \Phi')') - \dim(\Phi \cap \Phi') \leq \dim(\Phi + \Phi') - \dim \Phi$
3. $\bigcap_{s \in S} \Phi(s) = \bigcap_{s \in S} (\Phi \cap \Phi')(s)$

Beweis 1 folgt direkt aus der lokalen Darstellung von $\Phi \cap \Phi'$.

Mit einer einfachen Rechnung erhalten wir 2:

$\dim((\Phi \cap \Phi') + (\Phi \cap \Phi')') - \dim(\Phi \cap \Phi') \overset{1}{\leq} \dim \Phi - \dim(\Phi \cap \Phi') \overset{\mathrm{L}\,3.4}{=} \dim \Phi - (2 \dim \Phi - \dim(\Phi + \Phi')) = \dim(\Phi + \Phi') - \dim \Phi$.

Wegen $\Phi \supseteq \Phi \cap \Phi'$ ist für 3 nur die „$\subseteq$“ Inklusion zu zeigen. Sei $v \in \bigcap_{s \in S} \Phi(s)$, dann kann v als konstante global geliftete Leitkurve aufgefaßt werden. Da $v' = 0$ gilt nach der von den Leitkurven unabhängigen Darstellung von $\Phi \cap \Phi'$, daß $v \in \Phi \cap \Phi'$ bis auf isolierte Punkte, damit aber überall.

$\square$

Nun zum bereits angekündigten

Satz 3.6

Für eine Kurve $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ *gilt:*

1. $\Phi \cap \Phi' = \mathcal{D}\left((\mathcal{D}\oplus) + (\mathcal{D}\oplus)'\right)$
2. $\Phi + \Phi' = \mathcal{D}\left((\mathcal{D}\oplus) \cap (\mathcal{D}\oplus)'\right)$

Beweis 2 folgt aus 1 durch Ersetzen von Φ durch $\mathcal{D}\oplus$ und Anwenden von $\mathcal{D}$.

Wir beweisen die Gleichung 1 durch Rechnen bis auf isolierte Punkte mit den von den lokalen Leitkurven unabhängigen Darstellungen von $\Phi \cap \Phi'$ bzw. $(\mathcal{D}\oplus) + (\mathcal{D}\oplus)'$.

$\left((\mathcal{D}\oplus) + (\mathcal{D}\oplus)'\right)(\widehat{s}) = \{v \in \mathbb{C}^N \mid \exists\, \widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $U \subseteq S$ offene Umgebung von $\widehat{s}$, mit $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}\oplus$ und $\widetilde{\varphi}'(\widehat{\int}) = \sqsubseteq\}$

Durch Dualisieren erhalten wir

$\mathcal{D}\left((\mathcal{D}\oplus)+(\mathcal{D}\oplus)'\right)(\widehat{\int}) \;=\; \{\sqsupseteq \;\in\; \mathbb{C}^{\mathcal{N}} \;\mid\; \forall\, \widetilde{\varphi} : \mathcal{U} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$holomorph, $\mathcal{U} \;\subseteq\; \mathcal{S}$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}\oplus$ gilt $\sqsupseteq^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}'(\widehat{\int}) = \prime\}$.

Aus $(\mathcal{D}\oplus)+(\mathcal{D}\oplus)' \supseteq \mathcal{D}\oplus$ folgt $\mathcal{D}\left((\mathcal{D}\oplus)+(\mathcal{D}\oplus)'\right) \subseteq \oplus$, und somit

$\mathcal{D}\left((\mathcal{D}\oplus)+(\mathcal{D}\oplus)'\right)(\widehat{\int}) \;=\; \{\sqsupseteq \;\in\; \oplus(\widehat{\int}) \;\mid\; \forall\, \widetilde{\varphi} : \mathcal{U} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$holomorph, $\mathcal{U} \;\subseteq\; \mathcal{S}$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}\oplus$ gilt $\sqsupseteq^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}'(\widehat{\int}) = \prime\}$

$\overset{\mathrm{K}\ 2.8}{=}$ $\{w \in \mathbb{C}^N \mid \exists\, \widetilde{\psi} : V \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $V \subseteq S$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\psi} \in \Phi,$ $\widetilde{\psi}(\widehat{s}) = w$ und $\forall\, \widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $U \subseteq V$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}\oplus$ gilt $\widetilde{\psi}(\widehat{\int})^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}'(\widehat{\int}) = \prime\}$

Da $\widetilde{\psi} \in \Phi$ und $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}\oplus$ gilt

$$\widetilde{\psi}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi} = 0 \implies \widetilde{\psi}'^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi} + \widetilde{\psi}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}' = 0,$$

insbesondere ist also

$$\widetilde{\psi}(\widehat{s})^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}'(\widehat{s}) = -\widetilde{\psi}'(\widehat{s})^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}(\widehat{s}) = 0.$$

Damit können wir weiter folgern

$\mathcal{D}\left((\mathcal{D}\oplus)+(\mathcal{D}\oplus)'\right)(\widehat{\int}) \;=\; \{\sqsupseteq \;\in\; \mathbb{C}^{\mathcal{N}} \;\mid\; \exists\, \widetilde{\psi} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ holomorph, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\psi} \in \Phi,$ $\widetilde{\psi}(\widehat{s}) = w$ und $\forall\, \widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holo–morph, $U \subseteq V$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}\oplus$ gilt $\widetilde{\psi}'(\widehat{\int})^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\varphi}(\widehat{\int}) = \prime\}$

$\overset{\mathrm{K}\ 2.8}{=}$ $\{w \in \mathbb{C}^N \mid \exists\, \widetilde{\psi} : V \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $V \subseteq S$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\psi} \in \Phi,$ $\widetilde{\psi}(\widehat{s}) = w$ und $\forall\, v \in \mathcal{D}\oplus(\widehat{\int})$ gilt $\widetilde{\psi}'(\widehat{\int})^{\mathrm{T}} \cdot \sqsubseteq = \prime\}$

$= \{w \in \mathbb{C}^N \mid \exists\, \widetilde{\psi} : V \longrightarrow \mathbb{C}^N$ holomorph, $V \subseteq S$ offene Umgebung von $\widehat{s},$ mit $\widetilde{\psi} \in \Phi,$ $\widetilde{\psi}(\widehat{s}) = w$ und $\widetilde{\psi}'(\widehat{s}) \in \Phi(\widehat{s})\}$

$= (\Phi \cap \Phi')(\widehat{s}).$ $\square$

3.2 Die Normalform

Wir beweisen jetzt den Hauptsatz dieser Arbeit (vgl. [G/H1, p. 385]).

Satz 3.7 (Normalform)

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n, N)$ *eine Kurve mit* $\dim(\Phi + \Phi') = n + r$.

Dann existieren $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_r$, $l \in \mathbb{N}$ *mit* $\sum_{i=1}^{r} a_i + l = n$ *und Leitkurven* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$, *so daß*

$$\Phi = \varphi_1^{(a_1-1)} \oplus \ldots \oplus \varphi_r^{(a_r-1)} \oplus V,$$

wobei die $\varphi_i^{(a_i-1)}$ *die* $(a_i - 1)$*–ten assoziierten Kurven der* φ_i *sind und* V *ein* l*–dimensionaler Untervektorraum von* $\mathbb{C}^N$ *ist.*

Weiter ist

$$\Phi + \Phi' = \varphi_1^{(a_1)} \oplus \ldots \oplus \varphi_r^{(a_r)} \oplus V,$$

die $\varphi_i^{(a_i)}$ *haben dabei die volle Dimension* $a_i + 1$.

Bei dieser Darstellung sind $a_1, \ldots, a_r$ *und* V *eindeutig bestimmt und*

$$V = \bigcap_{s \in S} \Phi(s).$$

Beweis Wir zeigen die Existenz der Darstellung durch Induktion nach n.

Für $n = 0$ ist nichts zu beweisen.

Sei $n > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $r = 0$

   Dann ist $\dim(\Phi + \Phi') = n = \dim \Phi$. Also $\Phi + \Phi' = \Phi$, d. h. $\Phi = const. = V$, $n = \dim V =: l$ nach Hilfssatz 3.1.

2. $r > 0$

   Damit ist $\dim(\Phi \cap \Phi') = n - r < n$. Wir können also die Induktionsvoraussetzung auf $\Phi \cap \Phi'$ anwenden und erhalten

$$\Phi \cap \Phi' = \varphi_1^{(\overline{a}_1 - 1)} \oplus \ldots \oplus \varphi_{\overline{r}}^{(\overline{a}_{\overline{r}} - 1)} \oplus V,$$

   wobei $\overline{r} := \dim\left((\Phi \cap \Phi') + (\Phi \cap \Phi')'\right) - \dim(\Phi \cap \Phi')$ und $\sum_{i=1}^{\overline{r}} \overline{a}_i + l = n - r$.

   Weiter ist noch nach Induktionsvoraussetzung

$$(\Phi \cap \Phi') + (\Phi \cap \Phi')' = \varphi_1^{(\overline{a}_1)} \oplus \ldots \oplus \varphi_{\overline{r}}^{(\overline{a}_{\overline{r}})} \oplus V.$$

   Nach Hilfssatz 3.5 gilt $\overline{r} \leq r$ und $(\Phi \cap \Phi') + (\Phi \cap \Phi')' \subseteq \Phi$.

   Wir finden somit nach Satz 2.7 Kurven $\varphi_{\overline{r}+1}, \ldots, \varphi_r : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N)$, so daß

$$\Phi = \varphi_1^{(\overline{a}_1)} \oplus \ldots \oplus \varphi_{\overline{r}}^{(\overline{a}_{\overline{r}})} \oplus \varphi_{\overline{r}+1} \oplus \ldots \oplus \varphi_r \oplus V.$$

   Damit folgt die Existenz der Darstellung mit

$$\begin{array}{ll} a_i := \overline{a}_i + 1 & \text{für } i \in \{1, \ldots, \overline{r}\} \ \text{ und} \\ a_i := 1 & \text{für } i \in \{\overline{r}+1, \ldots, n\}. \end{array}$$

   Um die spezielle Form von $\Phi + \Phi'$ herzuleiten, bemerken wir, daß wegen

$$\Phi = \varphi_1^{(a_1 - 1)} \oplus \ldots \oplus \varphi_r^{(a_r - 1)} \oplus V$$

   auch

$$\Phi + \Phi' = \varphi_1^{(a_1)} + \ldots + \varphi_r^{(a_r)} + V$$

   gilt. Da $r = \dim(\Phi + \Phi') - \dim \Phi$ ist, muß diese Summe aus Dimensionsgründen direkt sein.

Für die Eindeutigkeitsaussagen nehmen wir an, daß eine Darstellung von Φ mit den oben genannten Eigenschaften gegeben ist. Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned} \Phi_{(0)} &:= \Phi \\ \Phi_{(k+1)} &:= \Phi_{(k)} \cap \Phi'_{(k)} \text{ für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Durch die Auflösung der Rekursion erhalten wir

$$\Phi_{(k)} = \varphi_1^{(a_1-1-k)} \oplus \ldots \oplus \varphi_r^{(a_r-1-k)} \oplus V,$$

wobei wir $\varphi_i^{(a_i-1-k)} := 0$ setzen, falls $a_i - 1 - k < 0$.
Die Dimensionsbetrachtung dieser Gleichung ergibt

$$\dim \Phi_{(k)} = l + \sum_{i=1}^{r} \max\{0, a_i - k\}$$

$$\Longrightarrow \dim \Phi_{(k)} - \dim \Phi_{(k+1)} = \#\{i \in \{1, \ldots, r\} \mid a_i - 1 \geq k\}.$$

Somit folgt die Eindeutigkeit der a_i.

Unter Ausnutzung von Hilfssatz 3.5.3 resultiert die Eindeutigkeit von V aus

$$V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Phi_{(k)} = \bigcap_{k=1}^{n} \Phi_{(k)}$$

$$\bigcap_{s \in S} \Phi(s) = \bigcap_{s \in S} \Phi_{(1)}(s) = \ldots = \bigcap_{s \in S} \Phi_{(n)}(s) = \bigcap_{s \in S} V = V.$$

□

Eine schöne Anwendung dieses Satzes ist die Klassifikation der Regelflächen, d. h. Kurven in der $\mathrm{G}(2,4) = \mathbb{G}(1,3)$, die wir im nächsten Abschnitt durchführen werden. Wir notieren hier noch zwei Korollare.

Korollar 3.8

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(n+1, N+1) = \mathbb{G}(n, N)$ *eine Kurve mit* $\dim(\Phi + \Phi') =$

$\dim \Phi + 1$, *dann ist entweder* Φ *die* n*–te assoziierte Kurve einer eindeutig bestimmten Leitkurve* $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N+1) = \mathbb{P}_N$ *oder ein Kegel, d. h.* $\dim \bigcap_{s \in S} \Phi(s) \geq 1$.

Beweis Nach dem Satz ist Φ darstellbar als

$$\Phi = \varphi^{(n-l)} \oplus V, \ \dim V = l.$$

Falls $V \neq 0$ ist, erhalten wir einen Kegel. Für $V = 0$ ist $\Phi = \varphi^{(n)}$. Wir erinnern wir uns noch kurz an den Beweis des Satzes, daraus geht hervor, daß in unserem Fall $\varphi = \varphi^{(0)} = \Phi_{(n)}$ und $\Phi_{(n+1)} = 0$ ist. Damit folgt die Eindeutigkeit von φ . $\square$

Eine weitere Spezialisierung ist

Korollar 3.9

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathrm{G}(N, N+1) = \mathbb{G}(N-1, N)$ *eine nicht–konstante Kurve, dann ist entweder* Φ *die* $(N-1)$*–te assoziierte Kurve einer eindeutig bestimmten Kurve* $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{G}(1, N+1) = \mathbb{P}_N$ *oder ein Kegel.*

Beweis Da Φ nicht konstant ist, folgt $N = \dim \Phi < \dim(\Phi + \Phi') \leq N + 1$, also $\dim(\Phi + \Phi') = \dim \Phi + 1$. Somit ist die Behauptung ein Spezialfall des obigen Korollars. $\square$

Beispiel

Der Beweis für die Normalform ist konstruktiv und gibt damit die Möglichkeit, die Normalform für konkret gegebene Kurven auszurechnen. Leider ist der Rechenaufwand sehr groß.

Deshalb wollen wir hier nur ein einfaches Beispiel betrachten. Die Rechnung erfolgt „bis auf isolierte Punkte“.

Sei $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{G}(4,6)$ gegeben durch

$$\Phi(s) = \mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1}(s), \widetilde{\varphi_2}(s), \widetilde{\varphi_3}(s), \widetilde{\varphi_4}(s)\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1-s & 4s-2 \\ 2-s & s-1 & -s^2+2s-2 & 5s^2-7s+4 \\ 4s-s^2 & s^2-2s & -s^3+3s^2-4s+2 & 4s^3-12s^2+8s-6 \\ 6s^2-s^3 & s^3-3s^2 & -s^4+4s^3-6s^2+6s & 4s^4-17s^3+12s^2-17s \\ 4s-s^2 & s^2-2s & -s^3+3s^2-4s+2 & 4s^3-12s^2+9s-5 \\ 4-2s & 2s-2 & -2s^2+4s-4 & 8s^2-14s+9 \end{array}\right\}.$$

Dann ist

$$(\Phi+\Phi')(s) = \mathrm{span}\{\widetilde{\varphi_1}(s), \widetilde{\varphi_2}(s), \widetilde{\varphi_3}(s), \widetilde{\varphi_4}(s), \widetilde{\varphi_1}'(s), \widetilde{\varphi_2}'(s), \widetilde{\varphi_3}'(s), \widetilde{\varphi_4}'(s)\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1-s & 4s-2 \\ 2-s & s-1 & -s^2+2s-2 & 5s^2-7s+4 \\ 4s-s^2 & s^2-2s & -s^3+3s^2-4s+2 & 4s^3-12s^2+8s-6 \\ 6s^2-s^3 & s^3-3s^2 & -s^4+4s^3-6s^2+6s & 4s^4-17s^3+12s^2-17s \\ 4s-s^2 & s^2-2s & -s^3+3s^2-4s+2 & 4s^3-12s^2+9s-5 \\ 4-2s & 2s-2 & -2s^2+4s-4 & 8s^2-14s+9 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2s+2 & 10s-7 \\ 4-2s & 2s-2 & -3s^2+6s-4 & 12s^2-24s+8 \\ 12s-3s^2 & 3s^2-6s & -4s^3+12s^2-12s+6 & 16s^3-34s^2+24s-17 \\ 4-2s & 2s-2 & -3s^2+6s-4 & 12s^2-24s+9 \\ -2 & 2 & -4s+4 & 16s-14 \end{array}\right\}.$$

Wir finden, daß $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2}, \widetilde{\varphi_3}, \widetilde{\varphi_4}, \widetilde{\varphi_3}', \widetilde{\varphi_4}'$ linear unabhängig sind, und damit

$r = 2$. Weiter gilt

$$-\widetilde{\varphi_1} + (-2s+1)\widetilde{\varphi_2} - 2\widetilde{\varphi_3} + \widetilde{\varphi_1}' = 0,$$
$$(t-1)\widetilde{\varphi_2} + \widetilde{\varphi_3} + \widetilde{\varphi_2}' = 0.$$

Also ist nach Definition

$$\Phi_{(1)} = \Phi \cap \Phi' = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2}\}$$

sowie

$$\Phi_{(1)} + \Phi'_{(1)} = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2}, \widetilde{\varphi_1}', \widetilde{\varphi_2}'\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2-s & s-1 & -1 & 1 \\ 4s-s^2 & s^2-2s & 4-2s & 2s-2 \\ 6s^2-s^3 & s^3-3s^2 & 12s-3s^2 & 3s^2-6s \\ 4s-s^2 & s^2-2s & 4-2s & 2s-2 \\ 4-2s & 2s-2 & -2 & 2 \end{array}\right\}.$$

Dabei sind $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2}, \widetilde{\varphi_1}'$ linear unabhängig und

$$-\widetilde{\varphi_1} - \widetilde{\varphi_2} + \widetilde{\varphi_1}' + 2\widetilde{\varphi_2}' = 0.$$

Also

$$\Phi_{(2)} = \Phi_{(1)} \cap \Phi'_{(1)} = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_1} + 2\widetilde{\varphi_2}\} = \operatorname{span}\{(1, s, s^2, s^3, s^2, 2s)^{\mathrm{T}}\}.$$

Damit hat Φ die Normalform $\Phi = \left(\Phi_{(2)}\right)^{(2)} \oplus \psi$, wobei $\psi = \operatorname{span}\{\widetilde{\varphi_4}\}$ oder — schöner — $\psi = \operatorname{span}\{(0, s^2, 0, s, s+1, 1)^{\mathrm{T}}\}$ gewählt werden kann.

Insgesamt

$$\Phi(s) = \text{span}\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & s^2 \\ s^2 & 2s & 2 & 0 \\ s^3 & 3s^2 & 6s & s \\ s^2 & 2s & 2 & s+1 \\ 2s & 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

3.3 Regelflächen

Wir wollen jetzt die Normalform nutzen, um die Regelflächen zu klassifizieren (für eine Diskussion im reellen Fall vgl. [dC, 3.5]).

Definition

Eine parametrisierte Regelfläche ist eine nicht–konstante Kurve $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{G}(1,3)$.

Um die Fläche wirklich sehen zu können, müssen wir die Geraden vereinigen.

Satz 3.10

Sei $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{G}(1,3)$ *eine parametrisierte Regelfläche, wobei* S *eine kompakte Riemannsche Fläche ist.*

Dann ist $\bigcup_\Phi := \bigcup_{s\in S} \Phi(s) \subseteq \mathbb{P}_3$ *eine algebraische Fläche.*

Beweis Nach dem Satz von Remmert ist $\Phi(S) \subseteq \mathbb{G}(1,3)$ analytisch. Wenn wir jetzt den Satz von Chow anwenden, erkennen wir, daß $\Phi(S)$ sogar algebraisch ist. Somit ist auch $\bigcup_\Phi := \bigcup_{s\in S} \Phi(s) \subseteq \mathbb{P}_3$ algebraisch nach Satz 1.9.

Zur Berechnung der Dimension siehe [E, Satz 5.3]. $\square$

Für die weitere Untersuchung der Regelfläche $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{G}(1,3)$ vereinbaren wir, daß S kompakt ist.

Da $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{G}(1,3) = \mathrm{G}(2,4)$ nicht konstant ist, gilt $\dim(\Phi + \Phi') \in \{3,4\}$.

- $\dim(\Phi + \Phi') = 4$

  Dies ist der nicht–entartete Fall. Hier hat Φ nach Satz 3.7 die Normalform $\Phi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, $\Phi + \Phi' = \varphi_1^{(1)} \oplus \varphi_2^{(1)}$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 : S \longrightarrow \mathbb{P}_3$ Leitkurven sind.

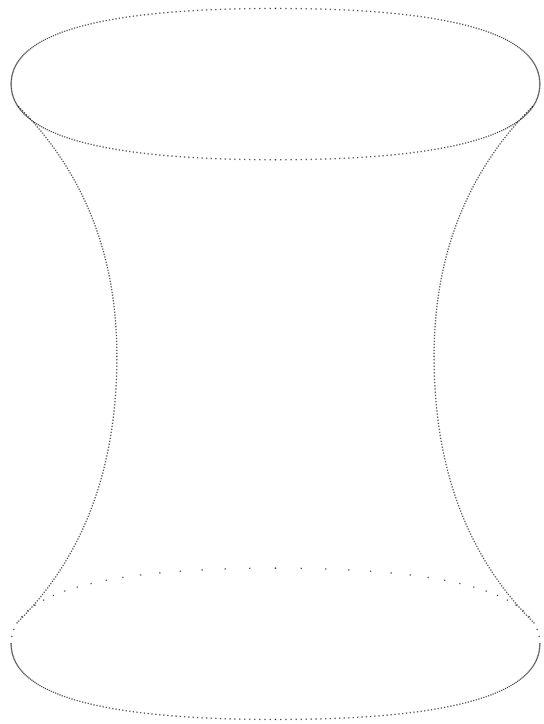
  Ein Beispiel ist die Sattelfläche:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{P}_1 & \longrightarrow & \mathbb{G}(1,3) = \mathrm{G}(2,4) \\ & (t_0 : t_1) & \longmapsto & \operatorname{span}\left\{\begin{matrix} t_0 & 0 \\ t_1 & 0 \\ 0 & t_0 \\ 0 & t_1 \end{matrix}\right\}. \end{array}$$

  Dann ist $\Phi + \Phi'$ auf der Karte $t_0 = 1$

$$(\Phi + \Phi')(t_1) = \operatorname{span}\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \text{ also } \dim(\Phi + \Phi)' = 4.$$

  Ein reelles, affines Bild von $\bigcup_\Phi$ ist



- $\dim(\Phi + \Phi') = 3$

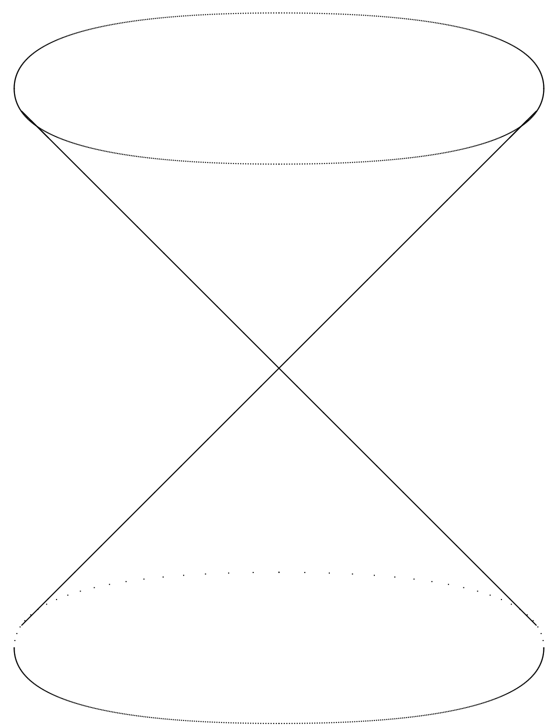
  In diesem Fall heißt Φ abwickelbar. Dies ist äquivalent dazu, daß die Tangentialebene in den regulären Punkten von $\bigcup_\Phi$ entlang jeder Regelgeraden $\Phi(s)$ konstant ist ([E, Satz 6.5]).

  Für die Normalform von Φ gibt es zwei Möglichkeiten:

  1. $\Phi = \varphi \oplus p$, $\Phi + \Phi' = \varphi^{(1)} \oplus p$,

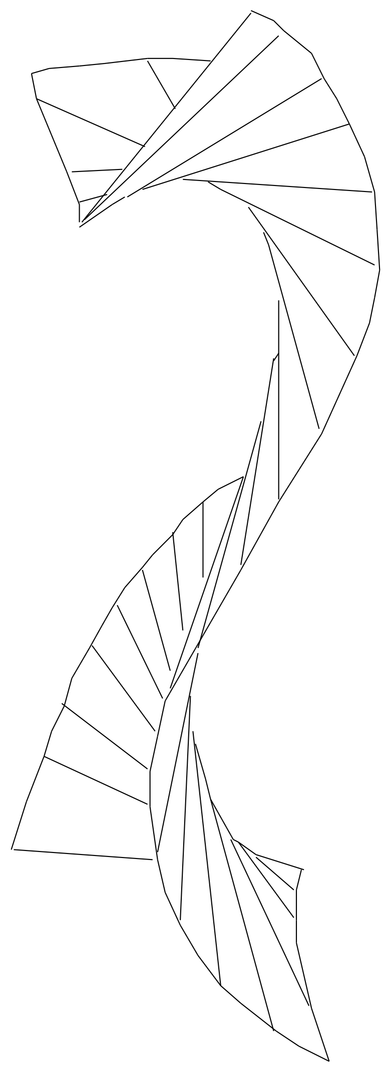
     wobei $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}_3$ eine Leitkurve und $p \in \mathbb{P}_3$ ein Punkt ist.

     $\bigcup_\Phi$ ist also ein Kegel.



2. $\Phi = \varphi^{(1)}$, $\Phi + \Phi' = \varphi^{(2)}$,

   d. h. Φ ist die erste assoziierte Kurve einer Leitkurve $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}_3$. Für jeden Punkt $s \in S$ ist $\varphi^{(1)}(s)$ die projektive Tangente von φ an $\varphi(s)$, deshalb heißt $\bigcup_\Phi$ Tangentenfläche.



Wir haben damit gezeigt (vgl. [E, Satz 6.8]):

Satz 3.11

Jede abwickelbare Regelfläche ist die Tangentenfläche einer Kurve oder ein Kegel.

Literaturverzeichnis

[dC] Manfredo P. do Carmo
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen
Vieweg, Braunschweig (1983)

[E] Dirk Ehrhard
Abwickelbare Regelflächen in der reellen und komplexen Differentialgeometrie
Diplomarbeit, Düsseldorf (1989)

[Fi] Gerd Fischer
Ebene algebraische Kurven
Vieweg (in Vorbereitung)

[Fo] Otto Forster
Riemannsche Flächen
Springer, Berlin (1977)

[G] Mark L. Green
The Moving Frame, Differential Invariants and Rigidity Theorems for Curves in Homogeneous Space
in: Duke Mathematical Journal, Vol. 45, No. 4 (Dec. 1978), pp. 735-779

[G/H1] Phillip Griffiths & Joseph Harris
Algebraic Geometry and Local Differential Geometry
in: Annales scientifiques de L' Écoles Normale Superérieure, 4^e série, tome 12 (1979), N^o 3, pp. 355-432

[G/H2] Phillip Griffiths & Joseph Harris
Principles of Algebraic Geometry
Wiley–Interscience, New York (1978)

[H] Joe Harris
Algebraic Geometry
Springer, New York (1992)

[L1] Serge Lang
Algebra
Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (1993)

[L2] Serge Lang
Differential Manifolds
Springer, Berlin (1985)

[P] Ragni Piene
Numerical Characters of a Curve in Projective n–space
in: Real and complex singularities, Oslo
P. Holm (ed.), Sijthoff & Noordhoff, Groningen (1976), pp. 475-495

[W] Raymond O. Wells
Differential Analysis on Complex Manifolds
Springer, New York (1980)

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Davis, Cal. (USA), den 4. Dez. 1993