# Abwickelbare Varietäten

**Inaugural - Dissertation**
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

**Jens Piontkowski**

aus Hilden

Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf 1995

Gedruckt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Gerd Fischer
Korreferent: Prof. Dr. Duco van Straten
Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1996

# Einleitung

Thema dieser Arbeit sind abwickelbare Varietäten, das sind projektive Varietäten, bei denen das Bild der Gaußabbildung von kleinerer Dimension als die Varietät selber ist.

Ausgangspunkt für diese Untersuchungen sind die Artikel „Developable Complex Analytic Submanifolds“ von Fischer und Wu sowie „Algebraic Geometry and Local Differential Geometry“ von Griffiths und Harris. In beiden Artikeln wird der Hauptsatz über abwickelbare Varietäten bewiesen, nämlich daß die allgemeine Faser der Gaußabbildung ein linearer Raum ist. Fischer und Wu entwickeln dafür in der Situation von Untermannigfaltigkeiten die Technik der „holmets“, eine Art bilinearer komplexer Differentialgeometrie, während Griffiths und Harris Cartans „moving frame“ Methode benutzen. Im Gegensatz dazu werden in dieser Arbeit nur klassische algebraische Methoden für den Beweis verwendet. Später entdeckte ich noch einen Beweis von Zak [Z2], der mit Hilfe von dualen Varietäten geführt wird.

Ebenfalls von Fischer und Wu ist die Aussage, daß die Singularitäten der Gaußabbildung mit den Fasern derselben verträglich sind. Diese Ausage wird hier auf völlig neue Weise bewiesen. Ebenso wird die von Griffiths und Harris gegebene Charakterisierung von abwickelbaren Varietäten, bei denen die Fasern der Gaußabbildung im allgemeinen eindimensional sind, erläutert.

Darüber hinaus wird eine Methode angeben, mit der abwickelbare Hyperflächen konstruiert werden können, und es wird versucht, möglichst viele weitere Aspekte von abwickelbaren Varietäten zu analysieren. So wird ein Bertini-Satz über den Schnitt von abwickelbaren Varietäten mit allgemeinen Hyperebenen bewiesen. Die Analyse der Singularitäten zeigt, daß die abwickelbaren Varietäten im allgemeinen hochdimensional singulär sind, wobei sich die mit den kleinsten Singularitäten als Kegel über glatten Varietäten herausstellen. Falls das Bild der Gaußabbildung eindimensional ist, hat es als Untervarietät der Grassmannvarietät eine interessante Eigenschaft, aus der umgekehrt, falls sie für eine eindimensionale Untervarietät der Grassmannvarietät gilt, folgt, daß diese das Bild einer Gaußabbildung ist.

Schließlich wird gezeigt, daß Tangentenvarietäten abwickelbar sind, und damit die Menge der Beispiele weiter vergrößert.

In den beiden Anhängen sind die grundlegenden Sätze über Grassmannvarietäten und rationale Abbildungen aufgeführt, die im Text ständig benutzt werden.

Mein herzlicher Dank gilt Prof. Gerd Fischer dafür, daß er mich in diese Thematik eingeführt und diese Arbeit betreut hat. Weiter bin ich Prof. Duco van Straten für seine Anregungen und Martin Gräf und Frank Loose für Diskusionen zu Dank verpflichtet.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Definition der Abwickelbarkeit und Beispiele

Um Abwickelbarkeit definieren zu können, müssen wir uns zunächst an die Gaußabbildung erinnern. Für eine projektive, irreduzible Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$, $\dim X = n$, ist die Gaußabbildung

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, N)$$

die rationale Abbildung, die induziert wird durch den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{sm}} & \longrightarrow & \mathbb{G}(n, N) \\ x & \longmapsto & \mathbb{T}_x X, \end{array}$$

der den glatten Punkten $x \in X_{\mathrm{sm}}$ deren projektiven Tangentialraum $\mathbb{T}_x X$ zuordnet. Daß dies wirklich eine rationale Abbildung ist, folgt aus der Darstellung

$$\mathbb{T}_x X = \mathcal{D}(\operatorname{grad} \mathcal{F}(\S) \mid \mathcal{F} \in \mathrm{I}(\mathcal{X})) = \mathcal{D}(\operatorname{grad} \mathcal{F}_\infty(\S), \ldots, \operatorname{grad} \mathcal{F}_{\mathcal{N}-\backslash}(\S)) \subseteq \mathbb{P}_\mathcal{N},$$

wobei $F_1, \ldots, F_{N-n} \in \mathrm{I}(X)$ die Gleichungen sind, die $X$ lokal um $x$ ausschneiden. (Zur Definition von $\mathcal{D}$ siehe Anhang A.) Wir haben hier, wie allgemein üblich, die Untervektorräume des $\mathbb{C}^{N+1}$ direkt mit den entsprechenden linearen Unterräumen des $\mathbb{P}_N$ identifiziert.

Wir kommen zur grundlegenden

**Definition 1.1**
*Für eine projektive, irreduzible Varietät $X$ heißt $r := \dim \operatorname{Im} \gamma$ der Rang der Abwickelbarkeit und $d := \dim X - \dim \operatorname{Im} \gamma = n - r$ der Grad der Abwickelbarkeit.*
*Falls $\dim \operatorname{Im} \gamma < \dim X$, heißt $X$ abwickelbar, sonst nicht abwickelbar.*

**Beispiele.** Historisch gesehen wurden zuerst die abwickelbaren Flächen im $\mathbb{P}_3$ untersucht. Und zwar einerseits von Gauß und Monge vom differentialgeometrischen Standpunkt aus, denn die Abwickelbarkeit entspricht im Flächenfall gerade der Bedingung, daß die Gaußkrümmung identisch null ist; andererseits aus algebra-geometrischer Sicht von Cayley [C], der an Hand einiger Beispiele nachrechnete, daß diese Flächen Tangentenflächen oder Kegel sind.

Man erhielt die folgende Klassifikation von abwickelbaren Flächen in $\mathbb{P}_3$. (Für eine moderne Darstellung siehe Ehrhard [E].)

1. Zweidimensionale Ebenen im $\mathbb{P}_N$

   Dies sind die einzigen, die abwickelbar vom Grad 2 sind.

2. Kegel

   Hierbei ist die Gaußabbildung konstant entlang der Verbindungsgeraden von einem beliebigen Punkt zur Kegelspitze.

3. Tangentenflächen

   Eine Tangentenfläche ist der Zariski-Abschluß der Vereinigung der Tangenten an den glatten Punkten einer Kurve. Die Gaußabbildung ist dabei konstant entlang der Tangenten.

Griffiths und Harris waren die ersten, die 1979 versuchten diese Ideen auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern [GH1]. Sie zeigten insbesondere, daß die Fasern der Gaußabbildung weiterhin immer lineare Räume sind. Leider ist der Artikel nur schwer verständlich und zum Teil lückenhaft. Fortgesetzt wurden diese Studien durch Zak 1987 [Z2] und Fischer und Wu 1995 [FW].

Um Beispiele für die höherdimensionalen Fälle zu bekommen, können wir die Beispiele aus der Dimension 2 verallgemeinern. Zunächst einmal sind natürlich auch höher dimensionale Kegel abwickelbar. Die Tangentenflächen lassen sich in zwei Richtungen verallgemeinern.

Einerseits können wir statt der Tangenten den $l$-ten oskulierenden Raum an die Kurve nehmen, dann erhalten wir Beispiele von Varietäten, die abwickelbar vom Rang 1 sind (siehe [GH1, 2a] und Abschnitt 11); andererseits können wir Tangentenvarietäten betrachten. Für eine projektive, irreduzible Varietät $X$ ist die Tangentenvarietät $\tau(X)$ definiert als

$$\tau(X) := \overline{\bigcup_{x \in X_{\mathrm{sm}}} \mathbb{T}_x X} = \bigcup_{\Lambda \in \operatorname{Im} \gamma} \Lambda$$

und hat im allgemeinen die Dimension $2 \dim X$. Sie ist abwickelbar vom Grad mindestens 1, und nicht vom Grad mindestens $\dim X$, wie man vielleicht vermuten würde (siehe [GH1, 5b] und Abschnitt 13).

Um weitere Beispiele untersuchen zu können, werden wir in Abschnitt 7 eine Methode von Cayley verallgemeinern, mit der sich abwickelbare Hyperflächen von beliebigem Grad und beliebiger Dimension konstruieren lassen.

Zum Abschluß schauen wir uns noch Varietäten $X \subseteq \mathbb{P}_N$ an, deren Tangentenvarietät $\tau(X)$ degeneriert ist, d.h. $\dim \tau(X) < 2 \dim X$. Dann gilt zwar der

**Satz 1.2**
*Abwickelbare Varietäten haben degenerierte Tangentenvarietäten.*

*Beweis.* Aus $\tau(X) = \bigcup_{\Lambda \in \operatorname{Im} \gamma} \Lambda \subseteq \mathbb{P}_N$ folgt

$$\dim \tau(X) \leq \dim X + \dim \operatorname{Im} \gamma < \dim X + \dim X = 2 \dim X. \qquad \square$$

Die Umkehrung ist jedoch falsch, wie die Segre-Einbettung von $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \subseteq \mathbb{P}_8$ zeigt, denn $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ ist glatt, also nicht abwickelbar, aber $\dim \tau(\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2) = 7$ (siehe [H, 11.26], $\tau(\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2) = \sigma(\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2)$ nach [Z1, 1.4]).

# Kapitel 2

# Die Tangentialräume der Grassmannvarietäten

Wir wollen als nächstes das Differential der Gaußabbildung untersuchen und werden dafür eine gute Beschreibung der Tangentialräume der Grassmannvarietäten benötigen. Daher werden wir in diesem Abschnitt den bekannten Isomorphismus

$$\Psi : \mathrm{T}_\Lambda \mathbb{G}(n,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda)$$

beschreiben, wobei $\Lambda \in \mathbb{G}(n,N)$. (Bei $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda)$ wird $\Lambda$ natürlich als Untervektorraum des $\mathbb{C}^{N+1}$ aufgefaßt.)

Sei $(e_0, \ldots, e_N)$ eine Basis des $\mathbb{C}^{N+1}$ mit $\Lambda = \mathrm{span}\{e_0, \ldots, e_n\}$ und zur Abkürzung setzen wir $M := \mathrm{M}((N-n) \times (n+1), \mathbb{C})$. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (M,0) & \longrightarrow & (\mathbb{G}(n,N),\Lambda) \\ & \begin{pmatrix} a_{n+1,0} & \cdots & a_{n+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,0} & \cdots & a_{N,n} \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{span}\left\{ e_0 + \sum\limits_{i=n+1}^{N} a_{i0} e_i, \ldots, e_n + \sum\limits_{i=n+1}^{N} a_{in} e_i \right\} \end{array}$$

eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{G}(n,N)$. Damit sind auch die Tangentialräume isomorph

$$\alpha : \mathrm{T}_0 M = M \xrightarrow{\cong} \mathrm{T}_\Lambda \mathbb{G}(n,N).$$

Und aus der linearen Algebra ist bekannt, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda) & \longrightarrow & M \\ & F & \longmapsto & \mathrm{M}^{(e_0,\ldots,e_n)}_{(e_{n+1}+\Lambda,\ldots,e_N+\Lambda)}(F) \end{array}$$

ein Isomorphismus ist, wobei $\mathrm{M}^{(e_0,\ldots,e_n)}_{(e_{n+1}+\Lambda,\ldots,e_N+\Lambda)}(F)$ die beschreibende Matrix von $F$ bezüglich der Basen $(e_0,\ldots,e_n)$ von $\Lambda$ und $(e_{n+1}+\Lambda,\ldots,e_N+\Lambda)$ von $\mathbb{C}^{N+1}/\Lambda$ bezeichnet.
Der Isomorphismus $\Psi$ ist dann gegeben durch

$$\Psi : \mathrm{T}_\Lambda\mathbb{G}(n,N) \xrightarrow{\alpha^{-1}} M \xrightarrow{\beta^{-1}} \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda).$$

Dieser Isomorphismus $\Psi$ ist unabhängig von der Wahl der Basis $(e_0,\ldots,e_N)$, dies folgt daraus, daß wir noch eine zweite Beschreibung von $\Psi$ haben, die unabhängig von der Basis $(e_0,\ldots,e_N)$ ist, vgl. [H, 16.2].

**Lemma 2.1**
*Sei $\xi : (\mathbb{C},0) \longrightarrow (\mathbb{G}(n,N),\Lambda)$ eine holomorphe Kurve und $\zeta : (\mathbb{C},0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ eine weitere holomorphe Kurve mit $\zeta \in \xi$, d.h. $\zeta(t) \in \xi(t)$ für $t$ im Definitionsbereich von $\zeta$ und $\xi$. Dann gilt für die lineare Abbildung $\Psi(\xi'(0)) \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda)$*

$$\Psi(\xi'(0))(\zeta(0)) = \zeta'(0) + \Lambda.$$

*Beweis.* Wegen $\xi(0) = \Lambda$ können wir annehmen, daß das Bild von $\xi$ ganz in dem Bild der lokalen Parametrisierung $\varphi$ liegt. Es gibt daher eine holomorphe Abbildung

$$\begin{array}{rccc} A: & (\mathbb{C},0) & \longrightarrow & M \\ & t & \longmapsto & A(t) \end{array}$$

mit $\xi(t) = \varphi(A(t))$, insbesondere $\xi'(0) = \mathrm{d}\varphi(0) \cdot A'(0) = \alpha(A'(0))$. Da $\zeta \in \xi = \varphi \circ A$ und

$$\varphi \circ A(t) = \operatorname{span}\left\{ e_0 + \sum_{i=n+1}^{N} a_{i0}(t)e_i, \ldots, e_n + \sum_{i=n+1}^{N} a_{in}(t)e_i \right\}$$

ist, existieren holomorphe Funktionen $\mu_0,\ldots,\mu_n : (\mathbb{C},0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j(t) \left( e_j + \sum_{i=n+1}^{N} a_{ij}(t)e_i \right),$$

und somit

$$\begin{aligned} \zeta'(0) + \Lambda &= \sum_{j=0}^{n} \mu_j'(0) \left( e_j + \sum_{i=n+1}^{N} a_{ij}(0)e_i \right) + \sum_{j=0}^{n} \mu_j(0) \left( \sum_{i=n+1}^{N} a_{ij}'(0)e_i \right) + \Lambda \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{N} \mu_j(0)a_{ij}'(0)e_i + \Lambda, \end{aligned}$$

da $A(0) = 0$ und $e_j \in \Lambda$.

Andererseits ist

$$\alpha^{-1}\left(\xi'(0)\right) = A'(0)$$

$$\Longrightarrow \alpha^{-1}\left(\xi'(0)\right) \cdot \begin{pmatrix} \mu_0(0) \\ \vdots \\ \mu_n(0) \end{pmatrix} = A'(0) \cdot \begin{pmatrix} \mu_0(0) \\ \vdots \\ \mu_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \mu_j(0) a'_{n+1\,j}(0) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} \mu_j(0) a'_{Nj}(0) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Psi\left(\xi'(0)\right)\left(\zeta(0)\right) = \beta^{-1}\alpha^{-1}\left(\xi'(0)\right)\left(\zeta(0)\right) = \sum_{i=n+1}^{N} \sum_{j=0}^{n} \mu_j(0) a'_{ij}(0) e_i + \Lambda$$

$$= \zeta'(0) + \Lambda. \qquad \square$$

Im weiterem werden wir den Isomorphismus als Identifikation betrachten, also einfach

$$\mathrm{T}_\Lambda \mathbb{G}(n, N) = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda)$$

schreiben.

# Kapitel 3

# Die zweite Fundamentalform

Wenn wir unsere bisherige Gaußabbildung an einem glatten Punkt $x \in X_{\mathrm{sm}}$ differenzieren, erhalten wir die Abbildung

$$\mathrm{d}\gamma(x) : \mathrm{T}_x X \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbb{T}_x X}\mathbb{G}(n, N) = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_x X, \mathbb{C}^{N+1}/\mathbb{T}_x X).$$

Durch das Auftreten sowohl des affinen Tangentialraumes, $\mathrm{T}_x X$, als auch des projektiven Tangentialraumes, $\mathbb{T}_x X$, ist diese Abbildung zu unsymmetrisch, um nützlich zu sein. Wir starten daher mit dem affinen Kegel $\widehat{X}$ von $X$ und dessen Gaußabbildung

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\gamma} : & \widehat{X} & \dashrightarrow & \mathrm{G}(n+1, N+1) \\ & y & \longmapsto & \mathrm{T}_y \widehat{X} \qquad \text{für } y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}}. \end{array}$$

Diese unterscheidet sich kaum von der alten, denn offensichtlich ist $\gamma(x) = \mathbb{T}_x X = \mathrm{T}_y \widehat{X} = \widehat{\gamma}(y)$ für $y \in x \setminus \{0\}$ und $x \in X_{\mathrm{sm}}$, wobei wir wie immer $\mathrm{G}(n+1, N+1)$ und $\mathbb{G}(n, N)$ identifizieren.

Wenn wir jetzt das Differential an einem glatten Punkt $y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}}$ bilden, erhalten wir

$$\mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) : \mathrm{T}_y \widehat{X} \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{T}_y \widehat{X}}\mathrm{G}(n+1, N+1) = \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_y \widehat{X}, \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y \widehat{X})$$

und somit eine bilineare Abbildung, die zweite Fundamentalform an der Stelle $y$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{I\!I}(y) : & \mathrm{T}_y \widehat{X} \times \mathrm{T}_y \widehat{X} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y \widehat{X} \\ & (v, w) & \longmapsto & \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)(v)(w). \end{array}$$

Falls $y \in x \in X$, dann haben wir mit unseren Identifizierungen

$$\mathrm{I\!I}(y) : \mathbb{T}_x X \times \mathbb{T}_x X \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}/\mathbb{T}_x X.$$

Die zentrale Aussage über $\mathrm{I\!I}$ ist:

**Lemma 3.1**
$\mathrm{I\!I}(y)$ *ist symmetrisch.*

*Beweis.* Sei $v, w \in \mathrm{T}_y \widehat{X} \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$, wir zeigen, daß $\mathrm{I\!I}(y)(v,w) = \mathrm{I\!I}(y)(w,v)$.
Um in Koordinaten des Tangentialraumes rechnen zu können, benötigen wir eine lokale Parametrisierung von $\widehat{X}$ um $y$

$$\begin{aligned} \Phi : \quad (\mathbb{C}^{n+1}, 0) &\longrightarrow (\widehat{X}, y) \\ s = (s_0, \ldots, s_n) &\longmapsto \Phi(s). \end{aligned}$$

Für die Bestimmung von $\mathrm{I\!I}(y)(v,w) = \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)(v)(w)$ benutzen wir die zweite Beschreibung des Isomorphismus'

$$\mathrm{T}_{\mathrm{T}_y \widehat{X}} \mathrm{G}(n+1, N+1) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_y \widehat{X}, \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y \widehat{X}).$$

Sei dazu $\xi : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\widehat{X}, y)$ eine holomorphe Kurve mit $\xi'(0) = v$, dann gibt es eine holomorphe Abbildung $\widetilde{\xi} : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ mit $\xi = \Phi \circ \widetilde{\xi}$, insbesondere also

$$v = \xi'(0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial s_i}(0) \widetilde{\xi}'(0)_i = \sum_{i=0}^{n} v_i \frac{\partial \Phi}{\partial s_i}(0),$$

wobei $v_i := \widetilde{\xi}'(0)_i$ die $i$-te Komponente des Vektor $\widetilde{\xi}'(0)$ bezeichnet, der damit $v$ in der Basis $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial s_0}(0), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial s_n}(0) \right)$ von $\mathrm{T}_y \widehat{X}$ ausdrückt.
Weiter brauchen wir noch eine holomorphe Kurve $\zeta : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{N+1}, w)$ mit $\zeta \in \widehat{\gamma} \circ \xi = \widehat{\gamma} \circ \Phi \circ \widetilde{\xi}$. Wegen dieser Bedingung und

$$\widehat{\gamma} \circ \Phi(s) = \mathrm{span} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_0}(s), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial s_n}(s) \right\}$$

gibt es Funktionen $\mu_0, \ldots, \mu_n : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\zeta(t) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(t) \frac{\partial \Phi}{\partial s_i}(\widetilde{\xi}(t)),$$

so daß

$$w = \zeta(0) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(0) \frac{\partial \Phi}{\partial s_i}(0) = \sum_{i=0}^{n} w_i \frac{\partial \Phi}{\partial s_i}(0),$$

wenn wir $w_i := \mu_i(0)$ definieren. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{I\!I}(y)(v,w) &= \mathrm{d}\gamma(y)(v)(w) \\
&= \zeta'(0) + \mathrm{T}_y\widehat{X} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mu_i'(0) \frac{\partial \Phi}{\partial s_i}(0) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mu_i(0) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial s_j}(0)\widetilde{\xi}'(0)_j + \mathrm{T}_y\widehat{X} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} w_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial s_j}(0) v_j + \mathrm{T}_y\widehat{X}.
\end{aligned}$$

Dies ist ein symmetrischer Ausdruck in $v$ und $w$, da $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_i \partial s_j}(0) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_j \partial s_i}(0)$, und damit ist auch $\mathrm{I\!I}(y)$ symmetrisch. □

$\mathrm{I\!I}(y)$ ist jedoch nicht ganz unabhängig von der Auswahl $y \in x \setminus \{0\}$, denn es gilt

**Hilfssatz 3.2**
$\mathrm{I\!I}(y) = \lambda \mathrm{I\!I}(\lambda y)$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

*Beweis.* Zum Beweis benutzen wir wieder die zweite Beschreibung des Isomorphismus' $\mathrm{T}_{\mathrm{T}_y\widehat{X}}\mathrm{G}(n+1, N+1) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_y\widehat{X}, \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y\widehat{X})$.
Sei $\xi : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\widehat{X}, y)$ eine holomorphe Kurve und $\zeta : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ eine weitere mit $\zeta \in \widehat{\gamma} \circ \xi$, dann ist

$$\mathrm{I\!I}(y)(\xi'(0), \zeta(0)) = \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)(\xi'(0))(\zeta(0)) = \zeta'(0) + \mathrm{T}_y\widehat{X}.$$

Wir setzen $\widetilde{\xi}(t) := \lambda\xi(\frac{1}{\lambda}t)$ und $\widetilde{\zeta}(t) := \zeta(\frac{1}{\lambda}t)$. Für diese Kurven gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}(0) &= \lambda\xi(0) &&= \lambda y \\
\widetilde{\zeta}(0) &= \zeta(\tfrac{1}{\lambda}0) &&= \zeta(0) \\
\widetilde{\xi}'(0) &= \tfrac{\lambda}{\lambda}\xi'(\tfrac{1}{\lambda}0) &&= \xi'(0) \\
\widetilde{\zeta}'(0) &= \tfrac{1}{\lambda}\zeta'(\tfrac{1}{\lambda}0) &&= \tfrac{1}{\lambda}\zeta'(0)
\end{aligned}$$

und

$$\widetilde{\zeta}(t) = \zeta(\tfrac{1}{\lambda}t) \in \widehat{\gamma}(\xi(\tfrac{1}{\lambda}t)) = \widehat{\gamma}(\lambda\xi(\tfrac{1}{\lambda}t)) = \widehat{\gamma}(\widetilde{\xi}(t)),$$

somit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{I\!I}(\lambda y)(\xi'(0), \zeta(0)) &= \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\lambda y)(\xi'(0))(\zeta(0)) \\
&= \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\lambda y)(\widetilde{\xi}'(0))(\widetilde{\zeta}(0)) \\
&= \widetilde{\zeta}'(0) + \mathrm{T}_y\widehat{X} \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\zeta'(0) + \mathrm{T}_y\widehat{X} \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)(\xi'(0))(\zeta(0)) \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{I\!I}(y)(\xi'(0))(\zeta(0)),
\end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{I\!I}(\lambda y) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{I\!I}(y)$. □

*Bemerkung.* Eine Konsequenz daraus ist, daß

$$\operatorname{rad}\mathrm{I\!I}(y) = \{v \in \mathrm{T}_y\widehat{X} \mid \mathrm{I\!I}(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in \mathrm{T}_y\widehat{X}\}$$

unabhängig von der Auswahl $y \in x \setminus \{0\}$ ist, man kann also einfach $\operatorname{rad}\mathrm{I\!I}(x)$ schreiben.

# Kapitel 4

# Berechnung von $\ker \mathrm{d}\gamma$

In diesem Abschnitt wollen wir für $y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}}$ den Kern der linearen Abbildung

$$\mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) : \mathrm{T}_y\widehat{X} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_y\widehat{X}, \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y\widehat{X})$$

berechnen, dieser stimmt nach dem letztem Abschnitt mit $\mathrm{rad}\,\mathbb{I}(y)$ überein. Aus den Rechnungen ergibt sich, daß diese Kerne zu einer rationalen Abbildung

$$\ker \mathrm{d}\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(d, N)$$

zufammengefaßt werden können.

Für die Berechnung sei $w \in \mathrm{T}_y\widehat{X}$ und $\xi : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\widehat{X}, y)$ eine holomorphe Kurve mit $\xi'(0) = w$. Dann gilt:

$$w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$$

$$\iff \xi'(0) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$$

$$\iff \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)(\xi'(0)) = 0 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_y\widehat{X}, \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y\widehat{X})$$

$\overset{2.1}{\iff}$ Für alle Kurven $\zeta : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ mit $\zeta \in \gamma \circ \xi$ ist $\zeta'(0) \in \mathrm{T}_y\widehat{X}$.

$\iff$ Für alle Kurven $\zeta : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ mit $(\mathrm{grad}\, F)^{\mathrm{T}}(\xi(t)) \cdot \zeta(t) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$ ist auch $(\mathrm{grad}\, F)^{\mathrm{T}}(\xi(0)) \cdot \zeta'(0) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$.

Nun folgt aus

$$(\mathrm{grad}\, F)^{\mathrm{T}}(\xi(t)) \cdot \zeta(t) = 0$$

durch Ableiten nach $t$, daß

$$(\mathrm{grad}\, F)^{\mathrm{T}}(\xi(t)) \cdot \zeta'(t) + \Big(\mathrm{Hess}\, F(\xi(t)) \cdot \xi'(t)\Big)^{\mathrm{T}} \cdot \zeta(t) = 0,$$

und somit an der Stelle $t = 0$

$$(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\xi(0)) \cdot \zeta'(0) + (\xi')^{\mathrm{T}}(0) \cdot \operatorname{Hess} F(\xi(0)) \cdot \zeta(0) = 0,$$

und wir können weiter schließen:

$\Longleftrightarrow$ Für alle Kurven $\zeta : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ mit $(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\xi(t)) \cdot \zeta(t) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$ ist auch $\zeta^{\mathrm{T}}(0) \cdot \operatorname{Hess} F(\xi(0)) \cdot \xi'(0) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$.

$\Longleftrightarrow$ Für alle $v \in \mathrm{T}_y \widehat{X}$ ist $v^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Hess} F(y) \cdot w = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) &= \left\{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(y) \cdot w = v^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Hess} F(y) \cdot w = 0 \\ \text{für alle } F \in \mathrm{I}(X) \text{ und } v \in \mathrm{T}_y \widehat{X} \end{array} \right\} \\ &= \mathcal{D}(\operatorname{grad} \mathcal{F}(\dagger), \sqsubseteq^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Hess} \mathcal{F}(\dagger) \mid \mathcal{F} \in \mathrm{I}(\mathcal{X}), \sqsubseteq \in \mathrm{T}_\dagger \widehat{\mathcal{X}}).\end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung erkennen wir nochmal, daß $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) = \operatorname{rad} \mathrm{II}(y)$ nicht von der Auswahl von $y \in x \setminus \{0\}$ abhängt, wir werden daher $\ker \mathrm{d}\gamma(x)$ statt $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$ schreiben.

Weiter muß für allgemeines $x \in X_{\mathrm{sm}}$ die projektive Dimension des Raumes $\ker \mathrm{d}\gamma(x)$ gleich $d = \dim X - \dim \operatorname{Im} \gamma$ sein. Da die Gaußabbildung rational ist, ist auch $\gamma^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} F$ und somit $\ker \mathrm{d}\gamma$ rational. Damit ist $\{x \in X_{\mathrm{sm}} \mid \dim \ker \mathrm{d}\gamma(x) > d\}$ Zariski-abgeschlossen in $X_{\mathrm{sm}}$, und wir definieren die Singularitätenmenge der Gaußabbildung als den Zariski-Abschluß dieser Menge in $X$

$$\operatorname{Sing} \gamma := \overline{\{x \in X_{\mathrm{sm}} \mid \dim \ker \mathrm{d}\gamma(x) > d\}} \subseteq X.$$

Zusammenfassend erhalten wir

**Lemma 4.1**
$\ker \mathrm{d}\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(d, N)$ *ist eine rationale Abbildung, die für* $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing} \gamma$ *gegeben ist als*

$$\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \left\{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(x) \cdot w = v^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Hess} F(x) \cdot w = 0 \\ \text{für alle } F \in \mathrm{I}(X) \textit{ und } v \in \mathbb{T}_x X \end{array} \right\}.$$

*Für ein solches $x$ gilt:*

$$\begin{aligned}\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \operatorname{rad} \mathrm{II}(x) &= \bigcap_{v \in \mathbb{T}_x X} \ker \mathrm{II}(x)(\_, v) = \bigcap_{v \in \mathbb{T}_x X} \ker \mathrm{II}(x)(v, \_) \\ &= \bigcap_{v \in \mathbb{T}_x X} \ker \left( \mathrm{d}\gamma(x)(v) \right).\end{aligned}$$

Genauso, wie ein $x \in X$ immer im projektiven Tangentialraum $\mathbb{T}_x X$ enthalten ist, gilt hier

**Lemma 4.2**
$x \in \ker \mathrm{d}\gamma(x)$ *für* $x \in X$.

*Beweis.* Wegen der Abgeschlossenheit der Bedingung reicht es, dies für die $x$ aus der offenen Menge $X_{\mathrm{sm}} \backslash \mathrm{Sing}\, \gamma$ zu zeigen, dort folgt es aus der Eulerformel. Für homogenes $F \in \mathrm{I}(X) \subseteq \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ ist

$$\sum_{i=0}^{N} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = \deg F \cdot F.$$

Einsetzen von $x$ ergibt

$$\sum_{i=0}^{N} x_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(x) = \deg F \cdot F(x) = 0.$$

Und durch Anwenden der Eulerformel auf $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ bekommen wir

$$\sum_{j=0}^{N} X_j \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_i} = (\deg F - 1) \cdot \frac{\partial F}{\partial X_i}.$$

In Matrizenschreibweise nach Einsetzen von $x$

$$\mathrm{Hess}\, F(x) \cdot x = (\deg F - 1) \cdot \mathrm{grad}\, F(x).$$

Also ist für alle $v \in \mathbb{T}_x X$

$$v^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Hess}\, F(x) \cdot x = (\deg F - 1) \cdot v^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{grad}\, F(x) = 0.$$

Da alle Operationen linear waren, gilt $v^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Hess}\, F(x) \cdot x = 0$ nicht nur für homogene $F \in \mathrm{I}(X)$, sondern für alle $F \in \mathrm{I}(X)$, d.h. $x \in \ker \mathrm{d}\gamma(x)$. $\square$

*Bemerkung.* Falls $X$ nicht abwickelbar ist, d.h. d=0, dann ist $\ker \mathrm{d}\gamma$ die rationale Abbildung

$$\ker \mathrm{d}\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(0, N) = \mathbb{P}_N$$

und das Lemma sagt, daß $x \in \ker \mathrm{d}\gamma(x)$ ist, damit muß $x = \ker \mathrm{d}\gamma(x)$ sein, d.h. $\ker \mathrm{d}\gamma$ ist die Identität.

# Kapitel 5

# Der Hauptsatz über abwickelbare Varietäten

In diesem Abschnitt beweisen wir die wichtigste geometrische Konsequenz der Abwickelbarkeit, nämlich daß eine abwickelbare Varietät eine Vereinigung von linearen Räumen ist. Wir präzisieren den Satz [GH1, (2.10)] von Griffiths und Harris bzw. den Satz [FW, Theorem 1] von Fischer und Wu, indem wir zeigen, daß diese linearen Räume in der Grassmannvarietät gerade die Varietät $\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ bilden.

**Satz 5.1**
*Für eine vom Grad $d$ abwickelbare Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ gilt:*

$$\bigcup \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma := \bigcup_{\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma} \Lambda = X$$

*und für jedes $\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ ist für alle Punkte $x \in \Lambda \cap X_{\mathrm{sm}}$ der Tangentialraum $\mathbb{T}_x X$ gleich.*
*Für $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing} \gamma$ gilt*

$$\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \big(\gamma^{-1}\gamma(x)\big)_x ,$$

*dabei bezeichnet $(\gamma^{-1}\gamma(x))_x$ die irreduzible Komponente von $\gamma^{-1}\gamma(x)$, die $x$ enthält.*
*Falls $X$ abwickelbar ist, d.h. $d > 0$, ist zusätzlich für fast alle $x \in X$*

$$\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \gamma^{-1}\gamma(x).$$

*Beweis.* Daß $X \subseteq \bigcup \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ ist, folgt aus dem Lemma 4.2.
Für die Umkehrung rechnen wir auf dem affinen Kegel $\widehat{X}$ von $X$. Wir wählen eine lokale Parametrisierung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^{n+1},0) & \longrightarrow & (\widehat{X},y) \\ & s & \longmapsto & \Phi(s) \end{array}$$

der Umgebung des Punktes $y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}} \setminus \widehat{\operatorname{Sing}\gamma}$. Nach dem impliziten Funktionensatz angewendet auf die Funktion $\widehat{\gamma} \circ \Phi$ können wir annehmen, daß $(\mathbb{C}^{n+1},0) = (\mathbb{C}^{d+1},0) \times (\mathbb{C}^{r},0)$, $r := n-d$, ist, so daß $\Phi((\mathbb{C}^{d+1},0) \times (s_{d+1},\ldots,s_n))$ lokal die Fasern von $\widehat{\gamma}$ parametrisiert.
Man sieht, daß für $l \in \{0,\ldots,d\}$ in dieser Situation $\frac{\partial \Phi}{\partial s_l}(s) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(s)$ ist, denn $\widehat{\gamma} \circ \Phi(s+\lambda e_l)$ hängt nicht von $\lambda$ ab und damit

$$\begin{aligned} & \widehat{\gamma} \circ \Phi(s+\lambda e_l) = \mathit{const.} \qquad \text{für } \lambda \in (\mathbb{C},0) \\ \overset{\frac{\partial}{\partial \lambda}}{\Longrightarrow}\; & \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s+\lambda e_l)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_l}(s+\lambda e_l) = 0 \qquad \text{für } \lambda \in (\mathbb{C},0) \\ \Longrightarrow\; & \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s_l}(s) = 0 \\ \Longrightarrow\; & \frac{\partial \Phi}{\partial s_l}(s) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s)). \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß für $s \in (\mathbb{C}^{n+1},0)$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} i) & \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial s_{i_1} \ldots \partial s_{i_k}}(s) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s)) & \text{für } i_1,\ldots,i_k \in \{0,\ldots,d\} \\ ii) & \dfrac{\partial^{k+1} \Phi}{\partial s_j \partial s_{i_1} \ldots \partial s_{i_k}}(s) \in \widehat{\gamma}(\Phi(s)) = \mathrm{T}_{\Phi(s)}\widehat{X} & \text{für } i_1,\ldots,i_k \in \{0,\ldots,d\} \\ & & \quad j \in \{0,\ldots,n\}. \end{array}$$

Beweis davon mit Induktion:
Im Fall $k=0$ ist *i)* das Lemma 4.2 und *ii)* klar. Um die Aussage für $k+1$ zu beweisen, starten wir mit der Induktionsvoraussetzung *ii)* für $k$. Für $F \in \mathrm{I}(X)$ ist

$$(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s)) \cdot \frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial s_j \partial s_{i_1} \ldots \partial s_{i_k}}(s) = 0.$$

Durch Ableiten nach $s_l$ erhalten wir

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_l}\right)^{\mathrm{T}}(s) \cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(s)) \cdot \frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial s_j \partial s_{i_1} \dots \partial s_{i_k}}(s)}_{(1)} +$$

$$\underbrace{(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s)) \cdot \frac{\partial^{k+2}\Phi}{\partial s_j \partial s_{i_1} \dots \partial s_{i_k} \partial s_l}(s)}_{(2)} = 0.$$

Falls $l \in \{0, \dots, d\}$ und $j \in \{0, \dots, n\}$ ist, ist $\frac{\partial \Phi}{\partial s_l}(s) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(s)$ und damit $(1) = 0$. Also gilt

$$(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s)) \cdot \frac{\partial^{k+2}\Phi}{\partial s_j \partial s_{i_1} \dots \partial s_{i_k} \partial s_l}(s) = 0,$$

und, da $F \in \mathrm{I}(X)$ beliebig war, auch *ii)* für $k + 1$.
Sei nun $l \in \{0, \dots, n\}$ und $j \in \{0, \dots, d\}$, dann ist, wie wir gerade gezeigt haben, $(2) = 0$ und somit

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_l}\right)^{\mathrm{T}}(s) \cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(s)) \cdot \frac{\partial^{k+1}\Phi}{\partial s_j \partial s_{i_1} \dots \partial s_{i_k}}(s) = 0$$

für alle $l \in \{0, \dots, n\}$ und $F \in \mathrm{I}(X)$, d.h. *i)* gilt für $k + 1$.

Wir betrachten jetzt

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & (\mathbb{C}^{d+1}, 0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^{N+1}, y) \\ & s = (s_0, \dots, s_d) & \longmapsto & \Phi(s_0, \dots, s_d, 0, \dots, 0). \end{array}$$

$\Psi$ parametrisiert also lokal um $y$ eine Faser der Gaußabbildung und es gilt nach dem eben Bewiesenen

$$\frac{\partial^k \Psi}{\partial s_{i_1} \dots \partial s_{i_k}}(s) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) \text{ für } k \geq 0 \text{ und } i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, d\},$$

dann ist nach dem Identitätssatz $\operatorname{Im} \Psi \subseteq \ker \mathrm{d}\gamma(y)$.

Nun hat das Bild von $\Psi$ die Dimension $d + 1$, daher ist es gleich groß wie der Untervektorraum $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$, somit gibt es eine Umgebung $U$ von $y$ mit

$$\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) \cap U = \operatorname{Im} \Psi \cap U \subseteq \widehat{X}.$$

Also liegt eine offene Teilmenge von $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$ in $\widehat{X}$, damit aber nach dem Identitätsssatz der ganze $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$.
Ingesamt haben wir gezeigt, daß $\ker \mathrm{d}\gamma(x) \subseteq X$ für alle $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma$, folglich ist $\Lambda \subseteq X$ für alle $\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$, denn

$$\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma = \overline{\{\ker \mathrm{d}\gamma(x) \mid x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma\}}.$$

Da $\Psi$ lokal um $y$ die Faser der Gaußabbildung, $\widehat{\gamma}^{-1}\widehat{\gamma}(y)$, parametrisiert, gilt

$$\operatorname{Im}\Psi \cap U = \widehat{\gamma}^{-1}\widehat{\gamma}(y) \cap U.$$

Mit der Gleichheit $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) \cap U = \operatorname{Im}\Psi \cap U$ ist

$$\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) \cap U = \widehat{\gamma}^{-1}\widehat{\gamma}(y) \cap U$$

und daher

$$\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y) = \left(\widehat{\gamma}^{-1}\widehat{\gamma}(y)\right)_y .$$

Projektiv gesehen ergibt dies

$$\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \left(\gamma^{-1}\gamma(x)\right)_x$$

für $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma$.
Also ist der Tangentialraum an $X$ in den Punkten $X_{\mathrm{sm}} \cap \Lambda$ konstant für $\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$, falls ein $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma$ existiert mit $\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \Lambda$, aber da das Konstantsein einer Funktion auf dem linearen Raum eine abgeschlossene Eigenschaft an die $\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ ist, muß dies für alle $\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ gelten.

Schließlich ist für $d \geq 1$ die allgemeine Faser der Gaußabbildung irreduzibel (Satz B.2), daher muß in diesem Fall $\ker \mathrm{d}\gamma(x) = \gamma^{-1}\gamma(x)$ für fast alle $x \in X$ sein. $\square$

*Bemerkung.* Der Zusatz ist auch richtig für $d = 0$, d.h. für eine nicht abwickelbare Varietät ist die allgemeine Faser von $\gamma$ ein Punkt.
Dies kann man mit einem Trick, den wir hier nur skizzieren wollen, aus dem Fall $d = 1$ folgern. Dafür betten wir $\mathbb{P}_N$ in den $\mathbb{P}_{N+1}$ ein. Sei $p \in \mathbb{P}_{N+1} \setminus \mathbb{P}_N$, dann betrachten wir den Kegel $K := \overline{pX}$ über $X$ mit Spitze $p$. Bei diesem ist für alle $z \neq p$ aus der Verbindungsgeraden von einem Punkt $x \in X$ nach $p$ der Tangentialraum

$$\mathbb{T}_z K = \operatorname{span}\{p, \mathbb{T}_x X\}.$$

Folglich sind die Bilder der Gaußabbildung von $X$ und $K$ über die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im}\gamma_X & \longrightarrow & \operatorname{Im}\gamma_K \\ \Lambda & \longmapsto & \operatorname{span}\{p,\Lambda\} \end{array}$$

isomorph, und für $\Lambda \in \operatorname{Im}\gamma_X$ gilt für die Fasern der beiden Gaußabbildungen

$$\gamma_X^{-1}(\Lambda) = \gamma_K^{-1}\left(\operatorname{span}\{p,\Lambda\}\right) \cap \mathbb{P}_N.$$

Weil die allgemeine Faser von $\gamma_K$ eine Gerade ist, muß deshalb die allgemeine Faser von $\gamma_X$ ein Punkt sein.

Wir wollen noch den Spezialfall, daß $X$ eine Hyperfläche ist, näher untersuchen, und aus unserem Ansatz den Satz [FW, Theorem 5] von Fischer und Wu herleiten.

**Satz 5.2**
*Eine irreduzible Hyperfläche $X \subseteq \mathbb{P}_N$ mit $\mathrm{I}(X) = (F)$ ist abwickelbar vom Rang*

$$\max_{z\in X}\{\operatorname{rank}\operatorname{Hess}F(z) - 2\} = \operatorname{rank}\operatorname{Hess}F(x) - 2$$

*für $x \in X$ allgemein.*

*Beweis.* Wir berechnen für $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma$

$$\begin{aligned} \ker \mathrm{d}\gamma(x) &= \left\{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\operatorname{grad}F)^{\mathrm{T}}(x)\cdot w = 0,\ v^{\mathrm{T}}\cdot \operatorname{Hess}F(x)\cdot w = 0 \\ \text{für } v \in \mathbb{T}_x X \end{array} \right\} \\ &= \left\{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\operatorname{grad}F)^{\mathrm{T}}(x)\cdot w = 0, \\ \operatorname{Hess}F(x)\cdot w \in \mathbb{C}\cdot \operatorname{grad}F(x) \end{array} \right\} \\ &= \{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} : \widetilde{H}(x)\cdot \tbinom{w}{\lambda} = 0 \}. \end{aligned}$$

Wobei wir zur Abkürzung

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \operatorname{Hess}F & \operatorname{grad}F \\ (\operatorname{grad}F)^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt haben. Wir behaupten nun, daß

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \ker \widetilde{H}(x) & \longrightarrow & \ker \mathrm{d}\gamma(x) \\ & \tbinom{w}{\lambda} & \longmapsto & w \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. $\pi$ ist offensichtlich surjektiv und injektiv, weil aus $0 = \pi\binom{w}{\lambda} = w$ und $\binom{w}{\lambda} \in \ker \widetilde{H}(x)$ folgt, daß $\lambda \cdot \operatorname{grad} F(x) = 0$ und somit $\lambda = 0$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im} \gamma = \dim \widehat{X} - \dim_{\mathrm{aff}} \ker \mathrm{d}\gamma(x) &= N - \dim \ker(\widetilde{H}(x)) \\
&= N - (N + 2 - \operatorname{rank} \widetilde{H}(x)) = \operatorname{rank} \widetilde{H}(x) - 2 \\
&= \operatorname{rank} \operatorname{Hess} F(x) - 2.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleicheit folgt aus der Eulerformel, die – wie im Beweis von Lemma 4.2 gezeigt – ergibt, daß

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(x) \cdot x = \deg F \cdot F(x) = 0 \\
&\operatorname{Hess} F(x) \cdot x = (\deg F - 1) \cdot \operatorname{grad} F(x)
\end{aligned}$$

ist. Daher ist die letzte Zeile von $\widetilde{H}(x)$ eine Linearkombination der oberen, also

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} \widetilde{H}(x) &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \operatorname{Hess} F(x) & \operatorname{grad} F(x) \\ (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(x) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \operatorname{Hess} F(x) & \operatorname{grad} F(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank} \operatorname{Hess} F(x).
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß $X$ abwickelbar vom Grad $\operatorname{rank} \operatorname{Hess} F(x) - 2$ für $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing} \gamma$ ist. Wegen der unteren Halbstetigkeit von $\operatorname{rank} \operatorname{Hess}(x)$ ist

$$\max_{z \in X} \{\operatorname{rank} \operatorname{Hess} F(z) - 2\} = \operatorname{rank} \operatorname{Hess} F(x) - 2. \qquad \square$$

# Kapitel 6

# Kegel

Die einfachste Klasse von Beispielen von abwickelbaren Varietäten sind die Kegel. Unter einem Kegel $X \subseteq \mathbb{P}_N$ mit Spitze $L \subset X$ verstehen wir eine nicht-lineare Varietät, die einen linearen Raum $L$ enthält, so daß $X$ für zwei Punkte $x \in X$ und $p \in L$ auch deren Verbindungsgerade enthält.

**Satz 6.1**
*Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ ein irreduzibler Kegel mit Spitze $L$, dann ist $X$ abwickelbar vom Grad mindestens* $\dim L + 1$.
*Genauer ist für $x \in X$ neben $x \in \ker \mathrm{d}\gamma(x)$ auch $L \subseteq \ker \mathrm{d}\gamma(x)$.*

*Beweis.* Wegen der Abgeschlossenheit der Bedingungen reicht es, sie für $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma$ zu beweisen. Wir rechnen wieder auf dem affinen Kegel $\widehat{X}$ von $X$. Sei $\widehat{L} = \operatorname{span}\{e_0, \dots, e_{\dim L}\}$ die Kegelspitze von $\widehat{X}$, d.h. für $y \in \widehat{X}$ ist auch $y + \sum_{i=0}^{\dim L} \lambda_i e_i \in \widehat{X}$ für alle $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Weiter sei $\Phi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\widehat{X}, y)$ eine lokale Parametrisierung um einen glatten Punkt $y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}} \setminus \widehat{L}$ aus dem Definitionsbereich von $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}$. Dann ist für beliebige $F \in \mathrm{I}(X)$, $j \in \{0, \dots, \dim L\}$ und $l \in \{0, \dots, n\}$

$$
\begin{aligned}
& F\left(\Phi(s) + \sum_{i=0}^{\dim L} \lambda_i e_i\right) = 0 \quad \text{für alle } \lambda_i \in \mathbb{C} \\
\overset{\frac{\partial}{\partial \lambda_j}}{\Longrightarrow} \quad & (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}\left(\Phi(s) + \sum_{i=0}^{\dim L} \lambda_i e_i\right) \cdot e_j = 0 \quad \text{für alle } \lambda_i \in \mathbb{C} \\
\Longrightarrow \quad & (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s)) \cdot e_j = 0 \\
\overset{\frac{\partial}{\partial s_l}}{\Longrightarrow} \quad & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_l}\right)^{\mathrm{T}}(s) \cdot \operatorname{Hess} F\,(\Phi(s)) \cdot e_j = 0.
\end{aligned}
$$

Da $\mathrm{T}_y\widehat{X} = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial s_0}(0),\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial s_n}(0)\right\}$ ist, heißt das $e_j \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$ nach Lemma 4.1. Weiter wissen wir schon, daß auch $y$ in $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$ liegt, folglich $\operatorname{span}\{e_0,\ldots,e_{\dim L}, y\} \subseteq \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$. Aber $y \notin \widehat{L}$, damit ist die projektive Dimension von $\ker \mathrm{d}\gamma(x)$ größer oder gleich $\dim L + 1$. □

Kegel kann man leicht an dem Bild ihrer Gaußabbildung erkennen.

**Satz 6.2**
*Für eine irreduzible Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ sind äquivalent:*

*i)* $X$ *ist ein Kegel.*

*ii) Alle Tangentialräume schneiden sich in einem linearen Raum* $L$.

*Falls dies erfüllt ist, ist* $L$ *die Kegelspitze.*

*Beweis.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : Sei ohne Einschränkung $p = (1 : 0 : \ldots : 0) \in X$ ein Punkt der Kegelspitze von $X$. Dann ist für $F \in \mathrm{I}(X)$ und $y \in x \setminus \{0\}$ für $x \in X$

$$\begin{aligned} & F(y+\lambda e_0) = 0 && \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \\ \overset{\frac{\partial}{\partial\lambda}}{\Longrightarrow}\; & (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(y+\lambda e_0)\cdot e_0 = 0 && \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \\ \Longrightarrow\; & (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(y)\cdot e_0 = 0, \end{aligned}$$

d.h. $p \in \mathbb{T}_x X$ für alle $x \in X$. Somit liegt die Kegelspitze im Schnitt aller Tangentialräume.
*ii)* $\Rightarrow$ *i)* : Sei $p \in L$ in allen Tangentialräumen $\mathbb{T}_x X$ enthalten, ohne Einschränkung sei wieder $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, somit ist für $F \in \mathrm{I}(X) \subseteq \mathbb{C}[X_0,\ldots,X_N]$ und $y \in \widehat{X}$

$$\frac{\partial F}{\partial X_0}(y) = (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(y)\cdot e_0 = 0,$$

also $\frac{\partial F}{\partial X_0} \in \mathrm{I}(X)$. Durch Induktion erhalten wir, daß $\frac{\partial^i F}{\partial X_0^i} \in \mathrm{I}(X)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir behaupten nun, daß

$$F(y+\lambda e_0) = 0 \quad \text{für alle } F \in \mathrm{I}(X), y \in \widehat{X}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Wir entwickeln das Polynom $F(y+\lambda e_0) \in \mathbb{C}[\lambda]$ nach Taylor

$$F(y+\lambda e_0) = F(y) + \lambda\frac{\partial F}{\partial X_0}(y) + \frac{1}{2}\lambda^2\frac{\partial^2 F}{\partial X_0^2}(y) + \ldots + \frac{1}{m!}\lambda^m\frac{\partial^m}{\partial X_0^m}(y),$$

da

$$\frac{\partial(F(y+\lambda e_0))}{\partial\lambda} = \frac{\partial F}{\partial X_0}(y+\lambda e_0), \frac{\partial^2(F(y+\lambda e_0))}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_0^2}(y+\lambda e_0), \ldots .$$

Nun haben wir aber gerade gezeigt, daß mit $F \in \mathrm{I}(X)$ auch $\frac{\partial^i F}{\partial X_0^i} \in \mathrm{I}(X)$ ist, daraus folgt

$$F(y) = \frac{\partial F}{\partial X_0}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial X_0^2}(y) = \ldots = 0,$$

Einsetzen in die Taylorentwicklung ergibt $F(y + \lambda e_0) = 0$. Also ist $\widehat{X}$ ein Kegel, dessen Spitze $e_0$ enthält.
Da $p \in L$ beliebig gewählt war, ist $X$ ein Kegel, dessen Spitze $L$ enthält.

Aus dem Beweis der anderen Richtung erhalten wir, daß $L$ die Spitze des Kegels enthält, und damit genau die Spitze von $X$ ist. $\square$

# Kapitel 7

# Konstruktion abwickelbarer Hyperflächen

Wir wollen uns nun Beispielen zuwenden. Da man abwickelbare Varietäten vom Rang 1 genau kennt (siehe Abschnitt 11), interessieren wir uns besonders für Beispiele von höherem Rang. Da man Hyperflächen wegen Satz 5.2 besonders einfach untersuchen kann, liegt es nahe, solche zu konstruieren. Das erste solche Beispiel, das kein Kegel ist, gaben Fischer und Wu [FW, 1D]. Weitere Beispielfamilien gibt es von Schlenger [S] und Bourgain [W], dessen Varietäten zusätzlich noch glatt auf dem $\mathbb{C}^N \subseteq \mathbb{P}_n$ sind.

Wir wollen hier eine Methode verallgemeinern, die bereits Cayley [C] bekannt war, der damit abwickelbare Varietäten im $\mathbb{P}_3$ konstruiert hat. (Für eine moderne Darstellung siehe [BG].)

Den geometrischen Hintergrund bilden die dualen Varietäten.

Für eine Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ ist die duale Varietät $X^*$ definiert als

$$X^* = \overline{\{H \in \mathbb{P}_N^* \mid \exists\, x \in X_{\mathrm{sm}} \text{ mit } \mathbb{T}_x X \subseteq H\}} \subseteq \mathbb{P}_N^*$$

und es gilt der Satz, daß $(X^*)^* = X$ ist.

Für eine Hyperfläche $X \subseteq \mathbb{P}_N$ ist die duale Varietät

$$X^* = \overline{\{\mathbb{T}_x X \in \mathbb{P}_N^* \mid x \in X_{\mathrm{sm}}\}}$$

einfach das Bild der Gaußabbildung. Damit ist klar, wie wir abwickelbare Varietäten konstruieren können. Wir starten mit einer irreduziblen Varietät

$Y \subseteq \mathbb{P}_N^*$ und bilden $X := Y^*$. Falls $X$ eine Hyperfläche ist, was häufig der Fall ist, dann ist $X$ abwickelbar vom Rang $\dim \operatorname{Im} \gamma = \dim X^* = \dim Y$. Voraus zu sagen, wann $X = Y^*$ eine Hyperfläche wird, scheint schwierig zu sein.

Wir können noch mehr Information gewinnen, wenn wir uns eine Verschärfung des Satzes $(X^*)^* = X$ anschauen. Dafür benötigen wir zwei Inzidenzvarietäten. Für eine Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ sei

$$CX := \overline{\{(x, H) \in X_{\mathrm{sm}} \times \mathbb{P}_N^* \mid \mathbb{T}_x X \subseteq H\}} \subseteq \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^*,$$

dann gilt natürlich $X^* = \pi_{\mathbb{P}_N^*}(CX)$, wobei $\pi_{\mathbb{P}_N^*} : \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^* \longrightarrow \mathbb{P}_N^*$ die kanonische Projektion ist. Für eine Varietät $Y \subseteq \mathbb{P}_N^*$ machen wir die gleiche Konstruktion nur mit vertauschten Seiten

$$CY := \overline{\{(x, H) \in \mathbb{P}_N^{**} \times Y_{\mathrm{sm}} \mid \mathbb{T}_H Y \subseteq x\}} \subseteq \mathbb{P}_N^{**} \times \mathbb{P}_N^* = \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^*.$$

**Satz 7.1**
*Für eine irreduzible Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ ist $CX$ irreduzibel und hat die Dimension $N-1$. Weiter gilt*

$$CX = CX^*.$$

*Beweis.* Siehe [H, 15.22-15.25] oder [K]. □

Falls $X$ eine Hyperfläche ist, können mit diesem Satz die Fasern der Gaußabbildung von $X$ in den glatten Punkten von $X^*$ bestimmt werden; denn für eine Hyperfläche ist

$$CX = \overline{\{(x, \mathbb{T}_x X) \in X_{\mathrm{sm}} \times \mathbb{P}_N^*\}} = \operatorname{Graph} \gamma,$$

somit für $H \in X_{\mathrm{sm}}^* = (\operatorname{Im} \gamma_X)_{\mathrm{sm}}$

$$\begin{aligned}
\gamma_X^{-1}(H) &= \pi_{\mathbb{P}_N}(CX \cap \mathbb{P}_N \times \{H\}) \\
&= \pi_{\mathbb{P}_N}(CX^* \cap \mathbb{P}_N \times \{H\}) \\
&= \pi_{\mathbb{P}_N}(\{(x, H) \in \mathbb{P}_N \times \{H\} \mid \mathbb{T}_H X^* \subseteq x\}) \\
&= \mathcal{D}(\mathbb{T}_{\mathcal{H}} \mathcal{X}^*) \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{N}}.^{\dagger}
\end{aligned}$$

Falls $d := N - 1 - \dim X^*$ ist, erhalten wir damit eine rationale Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \gamma^- : & X^* & \dashrightarrow & \mathbb{G}(d, N) \\ & H & \longmapsto & \mathcal{D}(\mathbb{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{X}^*), \end{array}$$

deren Bild $\operatorname{Im}\gamma^-$ gleich $\operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma$ sein muß, da bei beiden irreduziblen Varietäten fast alle Punkte die Fasern der Gaußabbildung sind.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie man konkret $CY$ für $Y \subseteq \mathbb{P}_N^*$, $\dim Y = r$, durch ein Computeralgebra-System berechnen kann.
Wenn $H \in Y_{\mathrm{sm}}$ ist, dann gibt es Polynome $F_1, \ldots, F_{N-r} \in \mathrm{I}(Y)$, die $Y$ lokal um $H$ ausschneiden, und auf einer Zariski-offenen Menge $U \subseteq Y$ ist der Tangentialraum gegeben als

$$\mathbb{T}_H Y = \mathcal{D}(\operatorname{grad}\mathcal{F}_\infty(\mathcal{H}), \ldots, \operatorname{grad}\mathcal{F}_{N-\nabla}(\mathcal{H})) \qquad \text{für } \mathcal{H} \in \mathcal{U}.$$

Damit sind alle Hyperebenen, die $\mathbb{T}_H Y$ enthalten, darstellbar durch die Gleichungen

$$\lambda_1 \cdot \operatorname{grad} F_1(H) + \ldots + \lambda_{N-r} \cdot \operatorname{grad} F_{N-r}(H).$$

Wenn wir dies in der rationalen Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \beta : & Y \times \mathbb{P}_{N-r-1} & \dashrightarrow & \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^* \\ & (H, \lambda) & \longmapsto & \left(\mathbb{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{N-r} \lambda_i \cdot \operatorname{grad} F_i(H)\right), H\right) \end{array}$$

zusammenfassen, dann liegt das Bild von $\beta$ in der irreduziblen Varietät $CY$ und stimmt mit dieser fast überall überein, folglich muß bereits $\operatorname{Im}\beta = CY$ gelten. Da $X := Y^* = \pi_{\mathbb{P}_N}(CY) = \pi_{\mathbb{P}_N}(\operatorname{Im}\beta)$ sein soll, ist $X$ das Bild von

$$\begin{array}{rccc} \beta' : & Y \times \mathbb{P}_{N-r-1} & \dashrightarrow & \mathbb{P}_N \\ & (H, \lambda) & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{N-r} \lambda_i \cdot \operatorname{grad} F_i(H)\right). \end{array}$$

---

$^\dagger$Die Dualität $\mathcal{D}$ ist in diesem Fall die Abbildung

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{D} : \mathbb{G}(N-1-d, (\mathbb{C}^{N+1})^*) & \longrightarrow & \mathbb{G}(d, (\mathbb{C}^{N+1})^{**}) = & \mathbb{G}(d, \mathbb{C}^{N+1}) \\ \mathbb{P}(V) & \longmapsto & \mathbb{P}(\operatorname{Ann} V) & = \mathbb{P}(\{w \in \mathbb{C}^{N+1} \mid w \in \bigcap_{v \in V} \ker v\}). \end{array}$$

Wenn wir den $\mathbb{C}^{N+1}$ mit dem $(\mathbb{C}^{N+1})^*$ durch die Abbildung $e_i \longmapsto e_i^*$ identifizieren, geht diese neue Dualität in die alte über.

Falls $X$ eine Hyperfläche ist, erhalten wir $\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ als das Bild der rationalen Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X^* = Y & \dashrightarrow & \mathbb{G}(d, N) \\ H & \longmapsto & \operatorname{span}\{\operatorname{grad} F_1(H), \ldots, \operatorname{grad} F_{N-r}(H)\}, \end{array}$$

wobei $d := N - 1 - r$ ist.

Die Bilder der rationalen Abbildungen können dann mit Hilfe der Techniken aus [CLO, 3.3] oder [BW, 7.6] durch ein Computeralgebra-System bestimmt werden.

Um uns jetzt der Methode von Cayley zu nähern, nehmen wir an, daß $Y \subseteq \mathbb{P}_N^*$, $\dim Y = r$, als Bild einer rationalen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P}_r \dashrightarrow Y$$

gegeben ist. Sei $U \subseteq \mathbb{P}_r$ die offene Menge, wo $\varphi$ definiert und submersiv ist. Wir definieren dann eine Art „parametrisierter Version“ von $CY$, nämlich

$$C'Y := \overline{\{(x, s) \in \mathbb{P}_N^{**} \times U \mid \mathbb{T}_{\varphi(s)} Y \subseteq x\}} \subseteq \mathbb{P}_N^{**} \times \mathbb{P}_r = \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_r.$$

Weiter sei $X = \pi_{\mathbb{P}_N}(C'Y)$ und dann gilt offensichtlich auch diesmal $X = Y^*$. Für $s \in U$ ist der Tangentialraum

$$\mathbb{T}_{\varphi(s)} Y = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}(s), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_r}(s) \right\},$$

dabei ist $\frac{\partial \varphi}{\partial s_i}(s)$ so zu verstehen, daß man $\varphi$ als $(N+1)$-Tupel von gleichgradigen, homogenen Polynomen schreibt, und diese dann nach $s_i$ ableitet. Die Hyperebenen, die $\mathbb{T}_{\varphi(s)} Y$ enthalten, sind $x \in \mathbb{P}_N$ mit

$$\begin{array}{cc} & x^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}(s) = \ldots = x^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_r}(s) = 0 \\ \iff & x \in \mathcal{D}\left(\operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}(s), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_r}(s) \right\}\right). \end{array}$$

Falls $X$ eine Hyperfläche ist, ist die Gaußabbildung konstant für diese $x$, und wir erhalten diesmal die rationale Abbildung, deren Bild $\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ ist, als

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_r & \dashrightarrow & \mathbb{G}(d, N) \\ s & \longmapsto & \mathcal{D}\left(\operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}(s), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_r}(s) \right\}\right). \end{array}$$

Weiter erhalten wir, daß

$$C'Y = \overline{\left\{(x,s) \in \mathbb{P}_N \times U \mid x^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}(s) = \ldots = x^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_r}(s) = 0\right\}} \subseteq \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_r$$

ist. Dies kann man noch anders schreiben, indem man das bihomogene Polynom

$$F(x,s) := x^{\mathrm{T}} \cdot \varphi(s)$$

einführt, dann ist

$$C'Y = \overline{\left\{(x,s) \in \mathbb{P}_N \times U \mid \frac{\partial F}{\partial s_0}(x,s) = \ldots = \frac{\partial F}{\partial s_r}(x,s) = 0\right\}}.$$

Dies kann jetzt wieder mit einem Computeralgebra-System berechnet werden und natürlich auch die Projektion $X = \pi_{\mathbb{P}_N}(C'Y)$.

Da wir aber nur an dem Fall interessiert sind, wenn $X$ eine Hyperfläche ist, können wir etwas Arbeit sparen, wenn wir statt $C'Y$ einfach

$$\mathrm{V}\left(\frac{\partial F}{\partial s_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial s_r}\right) \supseteq C'Y$$

projizieren, und aus dem Bild die passende Hyperfläche heraussuchen. Dabei darf die Abbildung $\varphi$ jedoch nicht allzuschlecht sein, denn sonst kann evtl. $\pi_{\mathbb{P}_N}\left(V\left(\frac{\partial F}{\partial s_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial s_r}\right)\right) = \mathbb{P}_N$ sein. Dies kommt aber nur sehr selten vor. Diese Vorgehensweise entspricht dem Verfahren von Cayley, falls $Y$ eindimensional ist.

Wir wollen jetzt ein solches Beispiel errechnen und es danach analysieren.

Wir wählen

$$F = s^2t^2X_0 + u^4X_1 + t^2u^2X_2 + stu^2X_3 + s^2tuX_4,$$

dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s} &= 2st^2X_0 + tu^2X_3 + 2stuX_4 \\
\frac{\partial F}{\partial t} &= 2s^2tX_0 + 2tu^2X_2 + su^2X_3 + s^2uX_4 \\
\frac{\partial F}{\partial u} &= 4u^3X_1 + 2t^2uX_2 + 2stuX_3 + s^2tX_4.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir

$$\Sigma := \mathrm{V}\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u}\right) \subseteq \mathbb{P}_4 \times \mathbb{P}_2$$

auf den $\mathbb{P}_4$ projizieren. Dies wird nach [CLO, 8.5] so durchgeführt, daß man $\Sigma$ mit der offenen Überdeckung $(\mathbb{P}_4 \times U)_U$, wobei $U$ die Elemente der affinen Standardüberdeckungen von $\mathbb{P}_2$ durchläuft, schneidet, diese Schnitte dann affin projiziert und schließlich alle Stücke wieder zusammensetzt. Da wir aber nur an den eins-codimensionalen, nicht-linearen Komponenten der Projektion interessiert sind, reicht es, wenn wir uns das Ergebnis einer solchen Projektion anschauen.

Die Dehomogenisierung von $\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u}$ mit $u = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} F_s &:= 2st^2X_0 + tX_3 + 2stX_4 \\ F_t &:= 2s^2tX_0 + 2tX_2 + sX_3 + s^2X_4 \\ F_u &:= 4X_1 + 2t^2X_2 + 2stX_3 + s^2tX_4. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{P}^4}(\mathrm{V}(F_s, F_t, F_u)) &= \mathrm{V}\left(\langle F_s, F_t, F_u\rangle \cap \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_4]\right) \\ &= \mathrm{V}(\langle X_1 G\rangle), \end{aligned}$$

wobei $G$ das irreduzible Polynom

$$\begin{aligned} G := {} & 64X_1X_2^2X_4^4 + 128X_0^2X_1^2X_2X_4^2 + 80X_0X_1X_2X_3^2X_4^2 - X_2X_3^4X_4^2 \\ & + 64X_0^4X_1^3 - 48X_0^3X_1^2X_3^2 + 12X_0^2X_1X_3^4 - X_0X_3^6 \end{aligned}$$

ist. Dabei wurde $\langle F_s, F_t, F_u\rangle \cap \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_4]$ mit Hilfe von Gröbnerbasen berechnet.

Zweifellos ist $G$ die interessantere Komponente, und wir erhalten unsere Hyperfläche $X = \mathrm{V}(G)$.

Man rechnet nach, daß $G$ die Determinante der Hessematrix von $G$, aber nicht alle 4-Minoren teilt, folglich ist der Rang der Hessematrix auf $X$ im allgemeinen 4, d.h $X$ ist – wie erwartet – abwickelbar vom Rang 2.

Durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems erhalten wir die Abbildung

$$
\begin{array}{rccc}
L: & \mathbb{P}_2 & \dashrightarrow & \mathbb{G}(1,4) \\
 & (s:t:u) & \longmapsto & \mathrm{V}\left(\frac{\partial F}{\partial s}(s,t,u,X), \frac{\partial F}{\partial t}(s,t,u,X), \frac{\partial F}{\partial u}(s,t,u,X)\right) \\
 & & & = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} u^4 \\ t^2 s^2 \\ 0 \\ -2stu^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u^2 \\ 0 \\ s^2 \\ -2st \\ 2tu \end{pmatrix} \right\},
\end{array}
$$

die die Faserung $\ker \mathrm{d}\gamma$ von $X$ parametrisiert.

$X$ ist kein Kegel, denn sonst gälte

$$\bigcap_{s,t,u} L(s:t:u) \neq 0$$

nach Satz 6.1, es ist aber

$$
\begin{aligned}
&L(1:1:0) \cap L(0:1:1) = \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cap \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = 0.
\end{aligned}
$$

Die Singularitäten von $X$ lassen sich zerlegen in

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Sing} X &= \mathrm{V}\left(\frac{\partial G}{\partial X_0}, \dots, \frac{\partial G}{\partial X_4}\right) \\
&= \mathrm{V}(X_0^2 X_1 + X_2 X_4^2, X_3) \cup \mathrm{V}(4X_0X_1 - X_3^2, X_4) \cup \\
&\quad \mathrm{V}(27X_0X_3^2 + 32X_2X_4^2, 32X_0X_1 + X_3^2).
\end{aligned}
$$

Wir wollen jetzt das Verhältnis der Geraden $L(s:t:u)$ zu diesen Komponenten untersuchen.

$X_1 := \mathrm{V}(X_0^2 X_1 + X_2 X_4^2, X_3)$

Die allgemeine Gerade $L(s:t:u)$ (genauer für $stu \neq 0$) schneidet $X_1$ in

$$L(s:t:u) \cap X_1 = (2u^4 : s^2t^2 : -s^2u^2 : 0 : -2tu^3) =: p(s:t:u).$$

Man sieht, daß sich in $p(s:t:u)$ die Geraden $L(s:t:u)$, $L(-s:t:u)$ und $L(s:-t:-u)$ treffen.

$X_2 := \mathrm{V}(4X_0X_1 - X_3^2, X_4)$
Hier ist für die allgemeine Gerade $L(s:t:u)$ (genauer $tu \neq 0$)

$$L(s:t:u) \cap X_2 = (u^4 : s^2t^2 : 0 : -2stu^2 : 0) =: p(s:t:u).$$

Diesmal schneiden sich in $p(s:t:u)$ alle Geraden $L(\widetilde{s}:\widetilde{t}:u)$ mit $\widetilde{s}\widetilde{t} = st$, d.h. $X$ enthält eine eindimensionale Schar von zweidimensionalen Kegeln, deren Spitzen in $X_2$ liegen.

$X_3 := \mathrm{V}(27X_0X_3^2 + 32X_2X_4^2, 32X_0X_1 + X_3^2)$
In diesem Fall ist der Schnitt von $X_3$ mit einer allgemeinen Gerade $L(s:t:u)$ (genauer $stu \neq 0$) gegeben durch

$$L(s:t:u) \cap X_3 = (-2u^4 : s^2t^2 : 3s^2u^2 : -8stu^2 : 6tu^3) =: p(s:t:u).$$

Diesmal kann aus $p(s:t:u)$ eindeutig $(s:t:u)$ und damit $L(s:t:u)$ bestimmt werden. Es gibt jedoch eine andere interessante Eigenschaft, und zwar ist die Gerade $L(s:t:u)$ in dem Tangentialraum $\mathbb{T}_{p(s:t:u)}X_3$ enthalten.

Der Tangentialraum von $X_3$ für $x \in X_3$ ist

$$\mathbb{T}_xX_3 = \mathcal{D}\left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 27x_3^2 \\ 0 \\ 32x_4^2 \\ 54x_0x_3 \\ 64x_2x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16x_1 \\ 16x_0 \\ 0 \\ 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right),$$

daher bei $p(s:t:u)$

$$\mathbb{T}_{p(s:t:u)}X_3 = \mathcal{D}\left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 6s^2t^2 \\ 0 \\ 4t^2u^2 \\ 3stu^2 \\ 4s^2tu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2s^2t^2 \\ -4u^4 \\ 0 \\ -stu^2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Jetzt rechnet man leicht nach, daß die Gerade $L(s:t:u)$ in dem Tangentialraum $\mathbb{T}_{p(s:t:u)}X_3$ enthalten ist.

Während man wohl Singularitäten wie bei $X_1$ erwartet hat, überraschen solche wie $X_2$ und $X_3$ vielleicht doch. In Abschnitt 12 werden wir zeigen unter welchen Bedingungen sie auftreten.

# Kapitel 8

# Der Schnittsatz

Wir wollen nun den Schnitt von abwickelbaren Varietäten mit Hyperebenen untersuchen.

Daß nur dann eine Aussage möglich ist, wenn man mit allgemeinen Hyperebenen schneidet, ist bereits klar, wenn man sich die projektiven Kegelschnitte anschaut. So ist der klassische Kegel $\mathrm{V}(X_0^2+X_1^2+X_2^2) \subseteq \mathbb{P}_3$ abwickelbar vom Grad 1, und die meisten seiner Schnitte sind Ellipsen und damit abwickelbar vom Grad 0, einige sind jedoch eine Gerade oder die Vereinigung von zwei Geraden, also abwickelbar vom Grad 1.

Trotzdem sollte es natürlich so sein, daß die allgemeine Hyperebene die allgemeine Faser der Abwickelung um eine Dimension herunterschneidet.

**Satz 8.1**
*Ist $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine vom Grad $d$ abwickelbare Varietät der Dimension $\geq 2$ und $H \subseteq \mathbb{P}_N$ eine allgemeine Hyperebene, dann ist $X \cap H$ abwickelbar vom Grad* $\max\{d-1, 0\}$.
*Genauer gesagt, ist*

$$\begin{array}{rccc} \ker \mathrm{d}\gamma_{X\cap H}: & X \cap H & \dashrightarrow & \mathbb{G}(d-1, N) \\ & x & \longmapsto & \ker \mathrm{d}\gamma_X(x) \cap H. \end{array}$$

*Beweis.* Daß $X \cap H$ wieder irreduzibel ist, sagt der Satz von Bertini. Wir brauchen also nur die Aussage über den Rang der Gaußabbildung zu beweisen. Dafür untersuchen wir zuerst den Zusammenhang zwischen der zweiten Fundamentalform auf $\widehat{X}$ und der auf $\widehat{X \cap H}$.

**Lemma 8.2**
*Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine $n$-dimensionale irreduzible Varietät, $x \in X_{\mathrm{sm}}$ ein glatter Punkt und $H \subseteq \mathbb{P}_N$ eine Hyperebene, die $X$ transversal in $x$ schneidet, dann ist*

$$\mathbb{T}_x(X \cap H) = \mathbb{T}_x X \cap H$$

*und falls $y \in x \setminus \{0\}$*

$$\mathrm{I\!I}_{\widehat{X \cap H}}(y) : \mathrm{T}_y(\widehat{X \cap H}) \times \mathrm{T}_y(\widehat{X \cap H}) \longrightarrow \widehat{H}/\mathrm{T}_y(\widehat{X \cap H})$$

*die Einschränkung von*

$$\mathrm{I\!I}_{\widehat{X}}(y) : \mathrm{T}_y\widehat{X} \times \mathrm{T}_y\widehat{X} \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y\widehat{X},$$

*wenn man den kanonischen Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H}/\mathrm{T}_y(\widehat{X \cap H}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y\widehat{X} \\ v + \mathrm{T}_y(\widehat{X \cap H}) & \longmapsto & v + \mathrm{T}_y\widehat{X} \end{array}$$

*als Identifikation betrachtet.*

*Beweis.* Daß $X \cap H$ glatt in $x$ und $\mathbb{T}_x(X \cap H) = \mathbb{T}_x X \cap H$ ist, gilt nach Definition des transversalen Schnittes. Damit ist nach dem ersten Isomorphiesatz für Moduln

$$\widehat{H}/\mathrm{T}_y(\widehat{X \cap H}) = \widehat{H}/(\mathrm{T}_y\widehat{X} \cap \widehat{H}) \cong (\widehat{H} + \mathrm{T}_y\widehat{X})/\mathrm{T}_y\widehat{X} = \mathbb{C}^{N+1}/\mathrm{T}_y\widehat{X}.$$

Wir berechnen nun $\mathrm{I\!I}_{\widehat{X \cap H}}(y)(v, w) = \mathrm{d}\widehat{\gamma}_{X \cap H}(y)(v)(w)$ für $v, w \in \mathrm{T}_y\widehat{X} \cap \widehat{H}$. Wir benötigen dafür nach Lemma 2.1 eine Kurve $\xi : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\widehat{X} \cap \widehat{H}, y)$ mit $\xi'(0) = v$ und eine Kurve $\zeta : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\widehat{H}, w)$ mit $\zeta \in \widehat{\gamma}_{X \cap H} \circ \xi$. Dann ist

$$\mathrm{I\!I}_{\widehat{X \cap H}}(y)(v, w) = \mathrm{d}\widehat{\gamma}_{X \cap H}(y)(v)(w) = \zeta'(0) + (\mathrm{T}_y\widehat{X} \cap \widehat{H}).$$

Aber wir können die Kurven auch einfach umdeuten und $\xi$ als eine Abbildung $\xi : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\widehat{X}, y)$ auffassen. Dann ist wegen $\widehat{\gamma}_{X \cap H} \subseteq \widehat{\gamma}_X \mid_{\widehat{X \cap H}}$ auch $\zeta \in \widehat{\gamma}_X \circ \xi$, also

$$\mathrm{I\!I}_{\widehat{X}}(y)(v, w) = \mathrm{d}\widehat{\gamma}_X(y)(v)(w) = \zeta'(0) + \mathrm{T}_y\widehat{X}.$$

Somit ist $\mathrm{I\!I}_{\widehat{X}}(y)(v, w) = \mathrm{I\!I}_{\widehat{X \cap H}}(y)(v, w)$ unter dem Isomorphismus. $\square$

Nun weiter mit dem Beweis des Satzes.
Sei $x \in X_{\mathrm{sm}}$, so daß $\dim_{\mathrm{aff}} \operatorname{rad} \mathrm{II}(x) = d + 1$ – also minimal – ist und $H$ eine Hyperebene, die $X$ in $x$ transversal schneidet. Damit schneidet $H$ die Varietät $X$ in fast allen Punkten transversal und wir können dort das Lemma benutzen.
Das Lemma 8.3 im Anschluß an diesen Beweis angewandt auf die von $\mathrm{II}_{\widehat{X}}(y)$, $y \in x \setminus \{0\}$, nach dem Homomorphiesatz ($\mathbb{C}y \subseteq \operatorname{rad} \mathrm{II}_{\widehat{X}}(y)$) induzierte symmetrische bilineare Abbildung

$$\mathrm{T}_y\widehat{X}/\mathbb{C}y \times \mathrm{T}_y\widehat{X}/\mathbb{C}y \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$$

besagt nun, daß für fast alle $H$ mit $y \in \widehat{H}$

$$\operatorname{rad} \mathrm{II}_{\widehat{X \cap H}}(y) = \operatorname{rad} \mathrm{II}_{\widehat{X}}(y) \cap \widehat{H} \supseteq \mathbb{C}y$$

ist, projektiv gedeutet heißt das

$$\operatorname{rad} \mathrm{II}_{X \cap H}(x) = \operatorname{rad} \mathrm{II}_X(x) \cap H \ni x.$$

Falls $\operatorname{rad} \mathrm{II}_X(x) \neq x$ ist, liegt für fast alle $H$ mit $x \in H$ ein echter Schnitt vor, also

$$\dim \operatorname{rad} \mathrm{II}_{X \cap H}(x) = \max\{\dim \operatorname{rad} \mathrm{II}_X(x) - 1, 0\} = \max\{d - 1, 0\}.$$

(dim steht dabei für die projektive Dimension der linearen Räume.)

Damit haben wir gezeigt, daß $\operatorname{rad} \mathrm{II}_{X \cap H}$ zumindest in $x$ die richtige Dimension hat. Wir brauchen jetzt wegen der oberen Halbstetigkeit der Dimension nur noch dafür zu argumentieren, daß die Dimension in fast allen anderen Punkten nicht kleiner ist, denn dann gilt für fast alle alle $z \in X \cap H$

$$\dim \operatorname{rad} \mathrm{II}_{X \cap H}(z) = \max\{d - 1, 0\},$$

d.h. $X \cap H$ ist abwickelbar vom Grad $\max\{d - 1, 0\}$.

Dort jedoch, wo $H$ die Varietät $X$ transversal schneidet, also für fast alle $z \in X \cap H$, ist

$$\operatorname{rad} \mathrm{II}_{X \cap H}(z) \supseteq \operatorname{rad} \mathrm{II}_X(z) \cap H \ni z,$$

folglich

$$\dim \operatorname{rad} \mathrm{II}_{X \cap H}(z) \geq \max\{d - 1, 0\}.$$

Bleibt anzumerken, daß die Wahl von $H$ allgemein war, da alle Anforderungen an $H$ außer $x \in H$ für fast alle $H$ erfüllt werden, und $x$ aus der offenen Menge $X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing} \gamma$ gewählt werden kann. $\square$

**Lemma 8.3**
*Seien $V$ und $W$ zwei endlich dimensionale $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$- Vektorräume und $\beta : V \times V \longrightarrow W$ eine symmetrische bilineare Abbildung, dann gilt für einen allgemeinen, 1-codimensionalen Unterverktorraum $U \subseteq V$*

$$\operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U} = \operatorname{rad} \beta \cap U.$$

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Fall, daß $\beta$ eine Bilinearform ist, d.h. $\dim W = 1$.
Hier müssen wir wieder zwei Fälle unterscheiden und zwar, ob $\beta$ degeneriert ist oder nicht. Wir starten mit $\beta$ nicht degeneriert:
Die erste Behauptung ist, daß die Menge

$$M := \{v \in V \mid \beta(v, v) \neq 0\} \subseteq V$$

offen und nicht leer ist. Die Offenheit folgt aus $M := (\beta \circ \Delta)^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$, wobei $\Delta : V \longrightarrow V \times V$, $v \longmapsto (v, v)$ die Diagonalabbildung ist. $M$ ist auch nicht leer, denn wegen $\beta \neq 0$ existieren $v_1, v_2 \in V$ mit $\beta(v_1, v_2) \neq 0$ und wir haben

$$\beta(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = \beta(v_1, v_1) + 2\beta(v_1, v_2) + \beta(v_2, v_2),$$

somit ist mindestens eins der $\beta(v_1{+}v_2, v_1{+}v_2)$, $\beta(v_1, v_1)$ oder $\beta(v_2, v_2)$ ungleich null.

Nun sind alle $U$ der Form

$$U = u^{\perp} := \ker \beta(u, \_) \qquad \text{mit } u \in M$$

eine allgemeine Wahl für $U$, denn $\beta$ induziert, da es nicht degeneriert ist, den Isomorphismus $V \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K}), v \longmapsto \beta(v, \_)$, damit ist

$$\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(\operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})) \cong \mathrm{G}(\dim V - 1, V)$$

und $\mathbb{P}(M)$ ist eine offene Menge in $\mathbb{P}(V)$.

Wir behaupten, daß für alle solche $U$ der Satz gilt, d.h.

$$\operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U} = 0.$$

Sei dafür $v \in \operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U}$, dann ist $\beta(v, U) = 0$, andererseits ist $\beta(v, u) = 0$ nach Definition von $U$, und somit

$$\beta(v, U + \mathbb{K} \cdot u) = \beta(v, V) = 0,$$

d.h. $v \in \operatorname{rad} \beta = 0$. Dabei ist $U + \mathbb{K} \cdot u = V$, da $u \in M$ und daher $u \notin u^{\perp} = U$.

Wenn $\beta$ degeneriert ist, ist die Wahl von $U$ noch einfacher. Zu einen $u \in \operatorname{rad} \beta \setminus \{0\}$ nehmen wir ein beliebiges $U \in \mathrm{G}(\dim V - 1, V)$ mit $V = \mathbb{K} \cdot u \oplus U$. Wir müssen zeigen, daß

$$\operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U} = \operatorname{rad} \beta \cap U.$$

Die „ $\supseteq$ “ Inklusion ist offensichtlich. Sei daher $v \in \operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U}$, dann ist $\beta(v, U) = 0$ und wegen $u \in \operatorname{rad} \beta$ auch $\beta(v, u) = 0$, insgesamt

$$\beta(v, U + \mathbb{K} \cdot u) = \beta(v, V) = 0,$$

also $v \in \ker \beta$.

Der allgemeine Fall, wo die Dimension von $W$ beliebig ist, folgt nun aus dem Spezialfall $\dim W = 1$. Wir wählen einen Isomorphismus $W \cong \mathbb{K}^{\dim W}$, bezeichnen die Projektionen von $W$ auf die $i$-te Komponente mit $\pi_i : W \longrightarrow \mathbb{K}$ und definieren $\beta_i := \pi_i \circ \beta$. Dann ist für alle $U$

$$\operatorname{rad} \beta = \bigcap_{i=1}^{\dim W} \operatorname{rad} \beta_i \quad \text{und} \quad \operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U} = \bigcap_{i=1}^{\dim W} \operatorname{rad} \beta_i \,|_{U \times U} .$$

Nun gilt nach dem oben bewiesenen Fall für fast alle $U$, daß

$$\operatorname{rad} \beta_i \,|_{U \times U} = \operatorname{rad} \beta_i \cap U \quad \text{für alle } i,$$

somit ist

$$\operatorname{rad} \beta \,|_{U \times U} = \bigcap_{i=1}^{\dim W} \operatorname{rad} \beta_i \,|_{U \times U} = \bigcap_{i=1}^{\dim W} (\operatorname{rad} \beta_i \cap U) = \operatorname{rad} \beta \cap U. \qquad \square$$

Ebenfalls mit einem allgemeinen transversalen Schnitt beweisen wir einen technischen Satz, der die Existenz von lokalen Parametrisierungen sichert, die an die Fasern der Gaußabbildung angepaßt sind.

**Satz 8.4**
*Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine $n$-dimensionale Varietät, die abwickelbar vom Grad $d$ ist. Dann existiert für $y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}} \setminus \widehat{\operatorname{Sing} X}$ eine lokale Parametrisierung $\Phi$ von $\widehat{X}$ um $y$ der Form*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^r, 0) \times (\mathbb{C}^{d+1}, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s), \end{array}$$

*wobei $r := n - d$ und $\varrho_i : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow \widehat{X}$.*
*Für diese gilt weiter:*

*i)* *Die Gaußabbildung $\widehat{\gamma} : \widehat{X} \dashrightarrow \mathrm{G}(n+1, N+1)$ ist konstant auf $\Phi(s, (\mathbb{C}^{d+1}, e_0))$ für $s$ fest.*

*ii)* $\mathrm{T}_{\Phi(s,t)}\widehat{X} = \operatorname{span}\left\{\varrho_i(s), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(s) \mid i \in \{0, \ldots, d\}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}$ *für $s \in (\mathbb{C}^r, 0)$ und $t \in (\mathbb{C}^{d+1}, e_0)$.*

*iii)* $\operatorname{span}\left\{\varrho_i(s), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(s) \mid i \in \{0, \ldots, d\}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}$
$= \operatorname{span}\left\{\varrho_i(s), \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_j}(s) \mid i \in \{0, \ldots, d\}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}$ *für $s \in (\mathbb{C}^r, 0)$.*

*iv)* $\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s,t)) = \operatorname{span}\{\varrho_i(s) \mid i \in \{0, \ldots, d\}\}$ *für $s \in (\mathbb{C}^r, 0)$ und $t \in (\mathbb{C}^{d+1}, e_0)$.*

*Nehmen wir umgekehrt an, daß es zu einer irreduziblen Varietät $X$ einen Punkt $y \in \widehat{X}$ mit einer lokalen Parametrisierung $\Phi$ von $\widehat{X}$ der Form*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^r, 0) \times (\mathbb{C}^{d+1}, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s) \end{array}$$

*gibt, dann sind die Bedingungen $i) - iii)$ äquivalent und aus ihnen folgt, daß $X$ abwickelbar vom Grad mindestens $d$ ist. Gilt $iv)$, so folgen $i) - iii)$ und $X$ ist abwickelbar vom Grad genau $d$.*

*Beweis.* Sei $x = \mathbb{P}(y)$. Wir wählen einen $d$-codimensionalen linearen Raum $L \subseteq \mathbb{P}_N$ so, daß er sowohl $X$ als auch $\ker \mathrm{d}\gamma(x)$ in $x$ transversal schneidet. Dann ist $x \in X \cap L$ glatt und es gibt eine lokale Parametrisierung

$$\Psi : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow (X \cap L, x)$$

der $r = n - d$ dimensionalen Varietät $X \cap L$ in der Umgebung von $x$. Da $x$ im Definitionsbereich von $\ker \mathrm{d}\gamma$ liegt, erhalten wir eine holomorphe Abbildung

$$\ker \mathrm{d}\gamma_{X\cap L} \circ \Psi : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{G}(d, N) \subseteq \mathbb{P}\left(\bigwedge\nolimits^{d+1} \mathbb{C}^{N+1}\right),$$

daher gibt es wie im Anhang A erläutert $\varrho_0, \ldots, \varrho_d : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ mit

$$\ker \mathrm{d}\gamma_{X\cap L} \circ \Psi(s) = \mathbb{P}(\varrho_0(s) \wedge \ldots \wedge \varrho_d(s)).$$

Wenn $\widetilde{\Psi} : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ eine Liftung von $\Psi$ ist, d.h eine holomorphe Abbildung mit $\mathbb{P}(\widetilde{\Psi}) = \Psi$, dann wissen wir nach Lemma 4.2, daß

$$\widetilde{\Psi}(s) \in \ker \mathrm{d}\gamma_X = \operatorname{span}\{\varrho_0(s), \ldots, \varrho_d(s)\} \subseteq \widehat{X},$$

und können nach Basisaustauschsatz annehmen, daß $\widetilde{\Psi} = \varrho_0$ ist.

Wir definieren $\Phi$ als

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{C}^r, 0) \times (\mathbb{C}^{d+1}, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s, t) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s). \end{array}$$

Dann ist

$$\mathrm{d}\Phi(0, e_0) = \left(\frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(0), \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(0), \varrho_0(0), \ldots, \varrho_d(0)\right).$$

Diese Matrix hat vollen Rang, denn erstens sind wegen

$$\mathrm{T}_y(\widehat{X \cap L}) = \operatorname{span}\left\{\varrho_0(0), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(0), \ldots \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(0)\right\}$$

die Vektoren $\varrho_0(0), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(0), \ldots \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(0)$ linear unabhängig und in $\widehat{L}$ enthalten, zweitens sind auch die Vektoren $\varrho_0(0), \ldots, \varrho_d(0)$ linear unabhängig und es gilt $\operatorname{span}\{\varrho_0(0), \ldots, \varrho_d(0)\} \cap \widehat{L} = \mathbb{C} \cdot \varrho_0(0)$. Damit ist $\Phi$ eine lokale Parametrisierung.

Nach Definition von $\Phi$ und dem Hauptsatz liegt $\operatorname{Im} \Phi(s, \text{-}) \subseteq \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}_X \circ \Psi(s)$ für festes $s$ in einer Faser der Gaußabbildung von $\widehat{X}$. Also ist für $s \in (\mathbb{C}^r, 0)$ und $t \in (\mathbb{C}^{d+1}, e_0)$

$$\mathrm{T}_{\Phi(s,e_0)} \widehat{X} = \mathrm{T}_{\Phi(s,t)} \widehat{X}.$$

Mit

$$\mathrm{T}_{\Phi(s,t)}\widehat{X} = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial s_1}(s,t),\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial s_r}(s,t),\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}(s,t),\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial t_d}(s,t)\right\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{\sum_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_1}(s),\ldots,\sum_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_r}(s),\varrho_0(s),\ldots,\varrho_d(s)\right\}$$

folgt

$$\begin{aligned}&\operatorname{span}\left\{\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_1}(s),\ldots,\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_r}(s),\varrho_0(s),\ldots,\varrho_d(s)\right\}\\ &= \mathrm{T}_{\Phi(s,e_0)}\widehat{X} = \mathrm{T}_{\Phi(s,t)}\widehat{X}\\ &= \operatorname{span}\left\{\sum_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_1}(s),\ldots,\sum_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_r}(s),\varrho_0(s),\ldots,\varrho_d(s)\right\}\\ &\quad \text{für } t\in(\mathbb{C}^{d+1},e_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff\quad &\operatorname{span}\left\{\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_1}(s),\ldots,\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_r}(s),\varrho_0(s),\ldots,\varrho_d(s)\right\}\\ &= \operatorname{span}\left\{\sum_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_1}(s),\ldots,\sum_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_r}(s),\varrho_0(s),\ldots,\varrho_d(s)\mid t\in(\mathbb{C}^{d+1},e_0)\right\}\\ &= \operatorname{span}\left\{\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_j}(s),\varrho_i(s)\mid i\in\{0,\ldots,d\},j\in\{1,\ldots,r\}\right\}.\end{aligned}$$

Sei jetzt $X$ eine beliebige irreduzible Varietät, für die eine solche Parametrisierung $\Phi$ gegeben ist. Daß die Bedingungen $i)$ und $iii)$ äquivalent sind, haben wir bereits oben gezeigt. Die Äquivalenz von $i)$ und $ii)$ folgt aus $\mathrm{T}_{\Phi(s,e_0)} = \operatorname{span}\{\varrho_i,\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_j}(s)\}$. Nun sieht man z.B. aus $i)$, daß die Gaußabbildung von $X$ mindestens $d$-dimensionale Fasern hat, damit ist $X$ abwickelbar vom Grad mindestens $d$. Die Bedingung $iv)$ besagt insbesondere, daß $\dim\ker \mathrm{d}\gamma(x) = d$ für fast alle Punkte $x\in X$, somit ist $X$ abwickelbar vom Grad $d$ und nach dem Hauptsatz ist die Gaußabbildung konstant entlang $\Phi(s,(\mathbb{C}^{d+1},0))\subseteq \ker\mathrm{d}\gamma(\Phi(s,t))$ für $s$ fest. $\square$

Aus dieser Parametrisierung von $\widehat{X}$ ergibt sich auch gleich eine für $\operatorname{Im}\ker\mathrm{d}\gamma$.

**Korollar 8.5**
*Sei* $\Phi(s,t) = \sum_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s)$ *die lokale Parametrisierung aus dem vorangegangenen Satz mit den Eigenschaften* $i) - iv)$ *und* $\Lambda = \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$*, dann ist*

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & (\mathbb{C}^r, 0) & \longrightarrow & (\mathrm{Im}\,\ker \mathrm{d}\gamma, \Lambda) \\ & s & \longmapsto & \mathbb{P}(\varrho_0(s) \wedge \ldots \wedge \varrho_d(s)) \end{array}$$

*eine lokale Parametrisierung von* $\mathrm{Im}\,\ker \mathrm{d}\gamma$.

*Beweis.* Daß die Abbildung wohldefiniert ist, besagt *iv*). Da beide Räume die gleiche Dimension haben, brauchen wir nur zu zeigen, daß

$$\mathrm{d}\Psi(0) : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathrm{T}_\Lambda(\mathrm{Im}\,\ker \mathrm{d}\gamma) \subseteq \mathrm{T}_\Lambda \mathbb{G}(d,N) = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda)$$

injektiv ist, d.h. die linearen Abbildungen

$$f_j := \mathrm{d}\Psi(0)\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\right) \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}^{N+1}/\Lambda)$$

müssen linear unabhängig sein. Es gilt aber viel stärker, daß bereits die $f_j(\varrho_0(0))$ linear unabhängig sind.
Um das zu beweisen, berechnen wir zuerst mit Hilfe von Lemma 2.1 die $f_j(\varrho_0(0))$. Da

$$\varrho_0(0,\ldots,0,s_j,0,\ldots,0) \in \Psi(0,\ldots,0,s_j,0,\ldots,0)$$

ist, können wir diese beiden Kurven als die für das Lemma benötigten Kurven benutzen und erhalten

$$\begin{aligned} f_j(\varrho_0(0)) &= \mathrm{d}\Psi(0)\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\right)(\varrho_0(0)) \\ &= \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(0) + \Lambda \\ &= \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(0) + \mathrm{span}\{\varrho_0(0),\ldots,\varrho_d(0)\}. \end{aligned}$$

Weil nach *ii*) $\varrho_0(0),\ldots,\varrho_d(0), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(0),\ldots,\frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(0)$ linear unabhängig sind, sind auch die $f_1(\varrho_0(0)),\ldots,f_r(\varrho_0(0))$ linear unabhängig. $\square$

# Kapitel 9

# Größe der Singularitäten von abwickelbaren Varietäten

Unsere bisherigen Beispiele von nicht-linearen, abwickelbaren Varietäten waren alle singulär. Damit stellt sich natürlich die Frage, ob es auch glatte gibt. Dies ist nicht der Fall, wie Griffiths und Harris mit ihrem Satz [GH1, (2.29)] feststellen. Wir wollen hier eine Abschätzung über die Größe der Singularitäten geben.

**Satz 9.1**
*Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine vom Grad $d$ abwickelbare Varietät, die kein linearer Raum ist. Weiter sei $\Lambda \in \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma \subseteq \mathbb{G}(d,N)$ eine der Fasern der Abwicklung, dann gilt*

$$d-1 \leq \dim(\Lambda \cap \operatorname{Sing} X) \leq d.$$

*Insbesondere ist*

$$\dim \operatorname{Sing} X \geq d-1.$$

*Beweis.* Wir geben zuerst einen Beweis für den Fall, daß $X$ eine Hyperfläche ist, da dieser sehr anschaulich ist, danach beweisen wir den allgemeinen Fall ohne auf den Hyperflächenfall zurückzugreifen.
Sei also $X$ eine Hyperfläche, $\mathrm{I}(X) = (F) \subseteq \mathbb{C}[X_0,\dots,X_N]$, und $\Lambda \in \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma$. Wir dürfen annehmen, daß $\Lambda \not\subseteq \operatorname{Sing} X$ ist, und einen Punkt $y \in \widehat{\Lambda} \setminus \widehat{\operatorname{Sing} X}$ wählen. Sei $(v_0,\dots,v_d)$ eine Basis von $\Lambda$. Da $\mathrm{T}_z\widehat{X} = \mathrm{T}_y\widehat{X}$ für

alle $z \in \widehat{\Lambda} \setminus \widehat{\operatorname{Sing} X}$, gibt es eine Funktion $\lambda(t_0, \ldots, t_d)$ mit

$$\operatorname{grad} F\left(\sum_{i=0}^{d} t_i v_i\right) = \lambda(t_0, \ldots, t_d) \cdot \operatorname{grad} F(y)$$

für alle $t_0, \ldots, t_d \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{i=0}^{d} t_i v_i \in \widehat{\Lambda} \setminus \widehat{\operatorname{Sing} \gamma}$.
Damit muß

$$\lambda(t) = \frac{\frac{\partial F}{\partial X_0}\left(\sum\limits_{i=0}^{d} t_i v_i\right)}{\frac{\partial F}{\partial X_0}(y)} = \ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial X_N}\left(\sum\limits_{i=0}^{d} t_i v_i\right)}{\frac{\partial F}{\partial X_N}(y)}$$

sein, und wenn wir $\lambda$ so auf ganz $\mathbb{C}^{d+1}$ definieren, muß nach dem Identitätssatz die Gleichung

$$\operatorname{grad} F\left(\sum_{i=0}^{d} t_i v_i\right) = \lambda(t_0, \ldots, t_d) \cdot \operatorname{grad} F(y)$$

für alle $t \in \mathbb{C}^{d+1}$ gelten. Wir schließen weiter

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{d} t_i v_i \in \Lambda \cap \operatorname{Sing} X \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda(t_0, \ldots, t_d) \cdot \operatorname{grad} F(y) = \operatorname{grad} F\left(\sum_{i=0}^{d} t_i v_i\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda(t) = 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$\Lambda \cap \operatorname{Sing} X = \mathrm{V}(\lambda) \subseteq \Lambda.$$

Also ist $d - 1 \leq \dim(\Lambda \cap \operatorname{Sing} X) \leq d$.

Wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall zu, wenn $X$ nicht notwendig eine Hyperfläche ist. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, daß es eine vom Grad $d$ abwickelbare Varietät und ein $\Lambda \in \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ gibt, so daß

$$l := \dim(\Lambda \cap \operatorname{Sing} X) < d - 1.$$

Wenn wir $X$ mit einem allgemeinen $(l+1)$-codimensional linearen Raum $L$ schneiden, ist nach dem Schnittsatz und Bertinis Satz $X \cap L$ abwickelbar vom

Grad $d-(l+1)\geq 1$ und $X\cap L$ glatt entlang $\Lambda\cap L$. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß von Anfang an $X$ glatt entlang $\Lambda$ war.

Wir wollen nun einen Satz von Zak [Z1, 1.4] benutzen und führen dafür folgende Bezeichnungen ein. Unter zu Hilfenahme der Varietät

$$\begin{aligned} \mathrm{S}^0(\Lambda,X) &:= \overline{\{(x,y,z)\in\Lambda\times(X\setminus\Lambda)\times\mathbb{P}_N \mid z\in \text{Gerade durch } x \text{ und } y\}} \\ &\subseteq \Lambda\times X\times\mathbb{P}_N \end{aligned}$$

und der kanonischen Projektion $\pi:\Lambda\times X\times\mathbb{P}_N\longrightarrow\mathbb{P}_N$ definieren wir die Sekantenvarietät von $X$ entlang $\Lambda$ als

$$\mathrm{S}(\Lambda,X):=\pi(\mathrm{S}^0(\Lambda,X))\subseteq\mathbb{P}_N$$

und die Varietät der projektiven Tangentensterne an $X$ entlang $\Lambda$ als

$$\mathbb{T}'(\Lambda,X):=\pi(\mathrm{S}^0(\Lambda,X)\cap\Lambda\times\Lambda\times\mathbb{P}_N).$$

Dabei ist $\mathbb{T}'(x,X)$ der Tangentenstern an $X$ in $x$ und es gilt natürlich

$$\mathbb{T}'(\Lambda,X)=\bigcup_{x\in\Lambda}\mathbb{T}'(x,X).$$

Zaks Satz besagt nun, daß entweder

$$\dim\mathbb{T}'(\Lambda,X)=d+n \qquad \text{und} \qquad \dim\mathrm{S}(\Lambda,X)=d+n+1$$

oder

$$\mathbb{T}'(\Lambda,X)=\mathrm{S}(\Lambda,X).$$

Nun ist in unserem Fall $X$ glatt entlang $\Lambda$, daher stimmen dort die projektiven Tangentensterne mit dem Zariski-Tangentialraum überein, d.h.

$$\mathbb{T}'(\Lambda,X)=\bigcup_{z\in\Lambda}\mathbb{T}'(z,X)=\bigcup_{z\in\Lambda}\mathbb{T}_zX=\mathbb{T}_xX \qquad \text{für } x\in\Lambda \text{ beliebig.}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\Lambda$ in einer Faser der Gaußabbildung enthalten ist. Damit ist

$$\dim\mathbb{T}'(\Lambda,X)=n$$

und andererseits ist auch

$$\mathbb{T}_xX=\mathbb{T}'(\Lambda,X)\neq\mathrm{S}(\Lambda,X)\supseteq X,$$

da $X\not\subseteq\mathbb{T}_xX$, denn $X$ ist nicht linear. Wir erhalten den gewünschten Widerspruch zu Zaks Satz. $\square$

**Korollar 9.2**
*Die einzigen glatten, abwickelbaren Varietäten sind lineare Räume.*

*Bemerkung.* Nach oben gibt es nur die gewöhnliche Abschätzung

$$\operatorname{Sing} X \leq \dim X - 1,$$

denn für jeden Kegel über einer Varietät, die Singularitäten der Kodimension eins besitzt, gilt die Gleichheit.

Die Varietäten, bei denen die Dimension der Singularitäten minimal ist, kann man genau angeben.

**Korollar 9.3**
*Eine vom Grad $d \geq 1$ abwickelbare Varietät $X$ mit $\dim \operatorname{Sing} X = d - 1$ ist ein Kegel über einer $(n-d)$-dimensionalen glatten Varietät mit dem $(d-1)$-dimensionalen linearen Raum $\operatorname{Sing} X$ als Spitze.*

*Beweis.* Zur Abkürzung setzen wir $B := \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$. Mit $X$ ist auch $B$ als Bild einer rationalen Abbildung irreduzibel. Sei

$$\operatorname{Sing} X = S_1 \cup \ldots \cup S_m \cup S_{m+1} \cup \ldots \cup S_l$$

die Zerlegung von $\operatorname{Sing} X$ in irreduzible Komponenten, so daß $\dim S_i = d - 1$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\dim S_i < d - 1$ für $i \in \{m+1, \ldots, l\}$. Wir definieren für $i \in \{1, \ldots, m\}$ die Varietäten (siehe A.3)

$$B_i := \Sigma(S_i) \cap B = \{\Lambda \in B \mid S_i \subseteq \Lambda\}.$$

Da nach dem Satz und $\dim \operatorname{Sing} X = d - 1$

$$\dim(\Lambda \cap \operatorname{Sing} X) = d - 1$$

für alle $\Lambda \in B$ ist, muß jedes $\Lambda$ mindestens eine der Komponenten $S_1, \ldots, S_m$ enthalten, folglich ist

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_m.$$

Da $B$ irreduzibel ist, ist $B = B_j$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ geeignet, d.h. alle $\Lambda \in B \subseteq \mathbb{G}(d, N)$ enthalten $S_j$ und damit auch $L = \operatorname{span}\{S_j\}$, den kleinsten linearen Raum, der $S_j$ enthält.

Wir können jetzt schließen, daß $X$ ein Kegel mit Spitze $L$ ist, denn für $x \in X$ existiert ein $\Lambda \in B$ mit $x \in \Lambda$, damit sind auch wegen $L \subseteq \Lambda$ alle Verbindungsgeraden von $x$ zu $L$ in $\Lambda \subseteq X$ enthalten.
Wir wissen bereits, daß $d - 1 = \dim S_j \leq \dim L$, wäre $\dim L \geq d$, dann wäre $X$ nach Satz 6.1 abwickelbar vom Grad $> d$, also ist $\dim L = d - 1$.

Sei $Z$ der Schnitt von $X$ mit einem allgemeinen $d$-codimensionalen linearen Raum, der $L$ nicht schneidet, dann ist $X$ der Kegel von $Z$ über $L$. $Z$ ist glatt, denn wäre $z \in \operatorname{Sing} Z$ ein singulärer Punkt von $Z$, dann wäre der ganze $d$-dimensionale lineare Raum $\mathbb{P}(\operatorname{span}\{z, L\}) \subseteq \operatorname{Sing} X$. Ein Widerspruch zu $\dim \operatorname{Sing} X = d - 1$.

Da $Z$ glatt ist, kann bei dem Kegel $X$ darüber nur die Kegelspitze $L$ singulär sein, daher ist $\operatorname{Sing} X = L$. $\square$

# Kapitel 10

# Singularitäten der Gaußabbildung

Wir wollen hier die Singularitäten der Gaußabbildung

$$\operatorname{Sing}\gamma = \overline{\{x \in X_{\mathrm{sm}} \mid \dim_{\mathrm{proj}} \ker \mathrm{d}\gamma(x) > d\}} \subseteq X$$

einer vom Grad $d$ abwickelbaren Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ untersuchen.

Für eine Hyperfläche $X$, $\mathrm{I}(X) = (F)$, ist $\operatorname{Sing}\gamma$ sehr einfach auszurechnen, denn da in den glatten Punkten $x \in X_{\mathrm{sm}}$

$$\dim \ker \mathrm{d}\gamma(x) = \dim \ker \operatorname{Hess} F(x)$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sing}\gamma &= \overline{\{x \in X_{\mathrm{sm}} \mid \dim_{\mathrm{aff}} \ker \operatorname{Hess} F(x) > d+1\}} \\
&= \overline{\{x \in X_{\mathrm{sm}} \mid \operatorname{rank} \operatorname{Hess} F(x) < N-d\}} \\
&= \overline{\mathrm{V}(F, (N-d) - \text{Minoren von } \operatorname{Hess} F) \setminus \operatorname{Sing} X}.
\end{aligned}$$

*Beispiel.* Für Quadriken ist $\operatorname{Hess} F$ konstant, folglich $\operatorname{Sing}\gamma = \emptyset$. Damit ist der Kegel $\mathrm{V}(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2) \subseteq \mathbb{P}_3$ ein Beispiel für eine Varietät mit $\operatorname{Sing} X \not\subseteq \operatorname{Sing}\gamma$. Die andere Inklusion gilt auch nicht immer, wie jede Kurve mit einem Wendepunkt zeigt.

Wir zeigen nun, daß sich die Faserung von $X$ durch $\operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma$ mit $\operatorname{Sing}\gamma$ verträgt. Die Aussage des Satzes ist eine Umformulierung des Satzes [FW, Theorem 2] von Fischer und Wu auf unsere Situation, wir wollen hier einen neuen Beweis geben.

**Satz 10.1**
*Sei* $X \subseteq \mathbb{P}_N$ *eine vom Grad* $d$ *abwickelbare Varietät, dann gilt für* $\Lambda \in \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma$ *entweder*

$$\Lambda \subseteq \operatorname{Sing}\gamma$$

*oder*

$$\Lambda \cap \operatorname{Sing}\gamma \subseteq \operatorname{Sing} X.$$

*Wenn wir*

$$Z := \mathrm{F}_d(\operatorname{Sing}\gamma) \cap \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma = \{\Lambda \in \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma \mid \Lambda \subseteq \operatorname{Sing}\gamma\}$$

*setzen, wobei* $\mathrm{F}_d(\operatorname{Sing}\gamma)$ *die Fanovarietät ist, dann ist*

$$\bigcup Z := \bigcup_{\Lambda \in Z} \Lambda = \operatorname{Sing}\gamma.$$

*Beweis.* Sei $\Lambda \not\subseteq \operatorname{Sing}\gamma$ und $\Lambda \not\subseteq \operatorname{Sing} X$, wir müssen dann zeigen, daß

$$(\Lambda \setminus \operatorname{Sing} X) \cap \operatorname{Sing}\gamma = \emptyset$$

ist, d.h.

$$x \in \Lambda \setminus \operatorname{Sing} X \Longrightarrow x \notin \operatorname{Sing}\gamma.$$

Nach den eben gemachten Voraussetzungen gibt es zumindest einen Punkt $x \in \Lambda \setminus (\operatorname{Sing}\gamma \cup \operatorname{Sing} X)$. Wir wählen die nach Satz 8.4 existierende Parametrisierung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^r, 0) \times (\mathbb{C}^{d+1}, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s) \end{array}$$

des affinen Kegels $\widehat{X}$ von $X$ um einen Punkt $y \in x \setminus \{0\}$ und setzen sie zu einer holomorphen Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^r, 0) \times \mathbb{C}^{d+1} & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s) \end{array}$$

fort. Dies ist dann natürlich keine Parametrisierung mehr, dafür aber umfaßt das Bild von $\Phi$ den Untervektorraum $\widehat{\Lambda}$.

Sei nun immer $t \in \mathbb{C}^{d+1}$, so daß $\Phi(0,t) \in \widehat{X}_{\text{sm}}$, wir müssen für unsere Behauptung zeigen, daß

$$\Phi(0,t) \notin \widehat{\operatorname{Sing}\gamma}$$

oder äquivalent dazu

$$\dim_{\text{aff}} \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t)) = d+1$$

ist, dafür reicht es wegen $y = \Phi(0,e_0) \notin \widehat{\operatorname{Sing}\gamma}$ zu zeigen, daß

$$\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t)) = \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y). \tag{$*$}$$

Die Inklusion „$\supseteq$“ ist einfach, denn sie ist nach Wahl der Parametrisierung richtig für $t \in (\mathbb{C}^{d+1}, e_0)$. Weiter ist

$$\ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t)) = \left\{ w \in \mathbb{C}^{N+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(0,t)) \cdot w = 0, \\ v^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(0,t)) \cdot w = 0 \\ \text{für alle } v \in \mathrm{T}_{\Phi(0,t)}\widehat{X}, F \in \mathrm{I}(X) \end{array} \right\}.$$

Da der Tangentialraum konstant entlang $\Phi(0,\mathbb{C}^{d+1}) \cap \widehat{X}_{\text{sm}}$ ist, können wir davon eine feste Basis $(v_0,\ldots,v_n)$ wählen, dann ist

$$w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t)) \iff \left\{ \begin{array}{l} (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(0,t)) \cdot w = 0, \\ v_i^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(0,t)) \cdot w = 0 \\ \text{für alle } i \in \{0,\ldots,n\}, F \in \mathrm{I}(X). \end{array} \right.$$

Nun wissen wir bereits, daß wenn $w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(y)$ ist, dann ist auch $w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t))$ für $t \in (\mathbb{C}^{d+1}, e_0)$, d.h. die Gleichungen auf der rechten Seite verschwinden für $t \in (\mathbb{C}^{d+1}, e_0)$. Damit verschwinden sie nach dem Identitätssatz für alle $t \in \mathbb{C}^{d+1}$, folglich $w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t))$ für alle $t \in \mathbb{C}^{d+1}$ mit $\Phi(0,t) \in \widehat{X}_{\text{sm}}$.

Dies ist selbstverständlich nicht nur auf die Stelle $s = 0$ beschränkt, sondern allgemein ist

$$\operatorname{span}\{\varrho_0(s),\ldots,\varrho_d(s)\} = \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s,0)) \subseteq \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s,t))$$

für $s \in (\mathbb{C}^r, 0)$ und $t \in \mathbb{C}^{d+1}$ mit $\Phi(s,t) \in \widehat{X}_{\text{sm}}$.

Um die andere Inklusion von $(*)$ zu zeigen, sei nun

$$w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0,t)) \subseteq \mathrm{T}_{\Phi(0,t)}\widehat{X}.$$

Da

$$\mathrm{T}_{\Phi(0,t)}\widehat{X} = \mathrm{T}_{\Phi(0,e_0)}\widehat{X} = \operatorname{span}\left\{\varrho_0(0), \ldots, \varrho_d(0), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(0), \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(0)\right\},$$

existieren $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ mit

$$w = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \varrho_i(0) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(0).$$

Wir müssen zeigen, daß $w \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(0, e_0))$ ist, dazu definieren wir

$$w(s) := \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \varrho_i(s) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(s) \in \mathrm{T}_{\Phi(s,\_)}\widehat{X}.$$

Dann ist $w = w(0)$ und

$$\frac{\partial w}{\partial s_k}(s) := \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_k}(s) + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial s_k s_j}(s).$$

Wir wollen jetzt eine Beziehung zwischen $w(s)$ und $\frac{\partial w}{\partial s_k}(0)$ herleiten.
Da $\varrho_i(s) \in \ker \mathrm{d}\widehat{\gamma}(\Phi(s,t))$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}(s,t) \in \mathrm{T}_{\Phi(s,t)}\widehat{X}$ ist, gilt für alle $F \in \mathrm{I}(X)$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right)^{\mathrm{T}}(s,t) \cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(s,t)) \cdot \varrho_i(s) = 0, \qquad (1)_{ik}$$

und, da $\frac{\partial \varrho_i}{\partial s_j}(s) \in \mathrm{T}_{\Phi(s,e_o)}\widehat{X} = \mathrm{T}_{\Phi(s,t)}\widehat{X}$, auch

$$(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s,t)) \cdot \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_j}(s) = 0. \qquad (2)_{ij}$$

Ableiten von $(2)_{0j}$ nach $s_k$ ergibt die Gleichung $(3)_{jk}$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right)^{\mathrm{T}}(s,t) \cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(s,t)) \cdot \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(s) + (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s,t)) \cdot \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial s_k \partial s_j}(s) = 0.$$

Wir summieren jetzt die Gleichungen auf die folgende Weise

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j (3)_{jk} + \sum_{i=0}^{d} \alpha_i (1)_{ik} + \sum_{i=0}^{d} \alpha_i (2)_{ik}$$

und erhalten

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\right)^{\mathrm{T}}(s,t)\cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(s,t))\cdot w(s)}_{(*)(s,t)} + \underbrace{(\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}}(\Phi(s,t))\cdot \frac{\partial w}{\partial s_k}(s)}_{(**)(s,t)} = 0.$$

Da $w = w(0) \in \ker \mathrm{d}\gamma(\Phi(0,t))$ ist, ist $(*)(0,t) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$, also auch $(**)(0,t) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$, d.h.

$$\frac{\partial w}{\partial s_k}(0) \in \mathrm{T}_{\Phi(0,t)}\widehat{X} = \mathrm{T}_{\Phi(0,e_0)}\widehat{X}.$$

Damit folgern wir auf die gleiche Weise zurück: $(**)(0,e_0) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$, also $(*)(0,e_0) = 0$ für alle $F \in \mathrm{I}(X)$, d.h.

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s_k}\right)^{\mathrm{T}}(0,e_0)\cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(0,e_0))\cdot w = 0$$

für $k \in \{1\ldots r\}$ und $F \in \mathrm{I}(X)$.

Da $\varrho_i(0) \in \ker \mathrm{d}\gamma(\Phi(0,e_0))$ gilt weiter

$$\varrho_i^{\mathrm{T}}(0)\cdot \operatorname{Hess} F(\Phi(0,e_0))\cdot w = 0.$$

Mit $\Phi(0,e_0) = y$ und

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_y\widehat{X} &= \operatorname{span}\left\{\varrho_0(0),\ldots,\varrho_d(0), \tfrac{\partial\varrho_0}{\partial s_1}(0),\ldots,\tfrac{\partial\varrho_0}{\partial s_r}(0)\right\}\\ &= \operatorname{span}\left\{\varrho_0(0),\ldots,\varrho_d(0), \tfrac{\partial\Phi}{\partial s_1}(0,e_0),\ldots,\tfrac{\partial\Phi}{\partial s_r}(0,e_0)\right\}\end{aligned}$$

haben wir schließlich

$$v^{\mathrm{T}}\cdot \operatorname{Hess} F(y)\cdot w = 0 \qquad \text{für alle } v \in \mathrm{T}_y\widehat{X},$$

d.h $w \in \ker \mathrm{d}\gamma(y)$. Dies schließt den Beweis der Gleichung $(*)$ ab.

Bei der Gleichung

$$\operatorname{Sing}\gamma = \bigcup Z$$

ist die „$\supseteq$“ Inklusion trivial. Für die andere bemerken wir, daß für $x \in \operatorname{Sing}\gamma \setminus \operatorname{Sing} X$ ein $\Lambda \in \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma$ existiert mit $x \in \Lambda \subseteq X$, und nach dem eben Bewiesenen folgt aus $x \in \operatorname{Sing}\gamma \setminus \operatorname{Sing} X$ bereits $\Lambda \subseteq \operatorname{Sing}\gamma$, somit ist $\Lambda \in Z$ und $x \in \bigcup Z$. Also ist $\operatorname{Sing}\gamma \setminus \operatorname{Sing} X \subseteq \bigcup Z$, deshalb

$$\operatorname{Sing}\gamma = \overline{\operatorname{Sing}\gamma \setminus \operatorname{Sing} X} = \bigcup Z. \qquad \square$$

# Kapitel 11

# Abwickelbarkeit vom Rang 1

Zunächst wollen wir die bisherigen Ergebnisse mit den früheren Untersuchungen [P] über Kurven in den Grassmannvarietäten in Zusammenhang bringen, um die Klassifikation der abwickelbaren Varietäten vom Rang 1 von Griffiths und Harris wie in [GH1, (2.20)] zu erhalten.

Wir starten mit einer vom Rang 1 abwickelbaren Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_N$ und nehmen eine Desingularisierung der eindimensionalen Varietät $\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$, somit erhalten wir eine holomorphe Abbildung von einer Riemannschen Fläche $S$ nach $\mathbb{G}(d, N)$

$$\Phi : S \longrightarrow \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma \subseteq \mathbb{G}(d, N)$$

mit $X = \bigcup_{s \in S} \Phi(s)$.
Der Satz 8.4 besagt nun, daß wir fast überall lokal $\varrho_0, \dots, \varrho_d : (S, s) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ finden können mit

$$\Phi = \operatorname{span}\{\varrho_0, \dots, \varrho_d\} \quad \text{und} \quad \dim \operatorname{span}\{\varrho_0, \dots, \varrho_d, \varrho_0', \dots, \varrho_d'\} = d + 2,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial s}$ mit $'$ abgekürzt ist. In den Formulierungen von [P] heißt das :

$$\dim(\Phi + \Phi') = 1 + \dim \Phi.$$

Damit erhalten wir mit [P, Satz 3.8], daß $\Phi$ geschrieben werden kann als

$$\Phi = \varphi^{(l)} \oplus \mathbb{P}(V),$$

wobei $\varphi^{(l)}$ die $l$-te oskulierende Kurve an eine Kurve $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}_N$ und $V \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$ ein Untervektorraum der Dimension $d - l$ ist. $\Phi(s)$ ist dann der kleinste lineare Raum, der $\varphi^{(l)}(s)$ und $\mathbb{P}(V)$ umfaßt.

Die Schlüsse in der obigen Argumentation sind umkehrbar, falls $X$ nicht selber ein linearer Raum ist, daher haben wir den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 11.1**
*Eine irreduzible, nicht-lineare Varietät ist genau dann abwickelbar vom Rang 1, wenn sie das Bild einer oskulierenden Kurve oder ein Kegel über einer solchen ist.*

Wir wollen nun die folgende Situation untersuchen:

Sei $B \subseteq \mathbb{G}(d,N)$ eine irreduzible Varietät. Wann ist $X = \bigcup_{\Lambda \in B} \Lambda$ eine abwickelbare Varietät mit $\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma = B$ ?

Wir geben für den Fall $\dim B = 1$ ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an. Für den Fall $\mathbb{G}(d,N) = \mathbb{G}(1,3)$ ist das Ergebnis klassisch (siehe z.B. [B, §18]) und sehr schön zu beweisen, da $\mathbb{G}(1,3) \subseteq PP\left(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4\right)$ durch nur eine Quadrik ausgeschnitten wird. Der Fall $d > 1$ ist wesentlich aufwendiger zu beweisen.

**Satz 11.2**
*Sei $B \subseteq \mathbb{G}(d,N)$ eine eindimensionale, irreduzible Varietät und $X = \bigcup_{\Lambda \in B} \Lambda$ kein linearer Raum. Dann sind äquivalent:*

*i)* *$X$ ist abwickelbar mit* $\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma = B$.

*ii)* *Für alle $\Lambda \in B_{\mathrm{sm}}$ ist $\mathbb{T}_\Lambda B \subseteq \mathbb{G}(d,N)$, wobei $\mathbb{T}_\Lambda B$ den in $\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathbb{C}^{N+1})$ eingebetteten Tangentialraum im Punkte $\Lambda$ an $B \subseteq \mathbb{G}(d,N) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathbb{C}^{N+1})$ bezeichnet.*

*Beweis.* Nach Satz A.4 ist $X$ irreduzibel.

*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*: Da die Eigenschaft *ii)* offensichtlich abgeschlossen ist, reicht es, sie für allgemeines $\Lambda \in B_{\mathrm{sm}}$ zu beweisen. Wähle einen allgemeinen Punkt $y \in \widehat{\Lambda} \subseteq \widehat{X}$. Dann gibt es nach dem Satz 8.4 holomorphe Abbildungen $\varrho_0, \ldots, \varrho_d : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$, so daß

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{C},0) \times (\mathbb{C}^{d+1}, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s) \end{array}$$

eine lokale Parametrisierung und weiter

$$\operatorname{span}\{\varrho_0(s),\dots,\varrho_d(s),\varrho_0'(s),\dots,\varrho_d'(s)\} = \operatorname{span}\{\varrho_0(s),\dots,\varrho_d(s),\varrho_0'(s)\}$$

ist, wobei die $\varrho_0(s),\dots,\varrho_d(s),\varrho_0'(s)$ linear unabhängig sind. Wir definieren

$$\widehat{\Psi} = \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d : (\mathbb{C},0) \longrightarrow \widehat{B} \subseteq \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^{N+1},$$

dann ist nach Korollar 8.5

$$\Psi := \mathbb{P}(\widehat{\Psi}) : (\mathbb{C},0) \longrightarrow (B,\Lambda)$$

eine lokale Parametrisierung von $B$, folglich ist

$$\mathbb{T}_\Lambda B = \operatorname{span}\left\{\widehat{\Psi}(0), \widehat{\Psi}'(0)\right\}.$$

Wir müssen also zeigen, daß

$$\lambda\widehat{\Psi}(0) + \mu\widehat{\Psi}'(0) \in \mathrm{G}(d+1,N+1) \qquad \text{für alle } \lambda,\mu \in \mathbb{C}$$

ist, oder nach Satz A.2 äquivalent dazu

$$\dim\left\{v \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \left(\lambda\widehat{\Psi}(0) + \mu\widehat{\Psi}'(0)\right) \wedge v = 0\right\} \geq d+1. \tag{$*$}$$

Zur Abkürzung der Schreibweise denken wir uns bei der weiteren Rechnung die Funktionen immer an der Stelle 0 ausgewertet.

Da $\varrho_i' \in \operatorname{span}\{\varrho_0,\dots,\varrho_d,\varrho_0'\}$ für $i \in \{0,\dots,d\}$ existieren $\alpha_i^j, \alpha_i \in \mathbb{C}$ mit

$$\varrho_i' = \sum_{j=0}^{d} \alpha_i^j \varrho_j + \alpha_i \varrho_0'.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\lambda\widehat{\Psi} + \mu\widehat{\Psi}' = \\
&= \lambda\varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d + \mu \sum_{i=0}^{d} \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_i' \wedge \ldots \wedge \varrho_d \\
&= \lambda\varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d + \mu \sum_{i=0}^{d} \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j=0}^{d} \alpha_i^j \varrho_j + \alpha_i \varrho_0'\right) \wedge \ldots \wedge \varrho_d \\
&= \left(\lambda + \mu \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^i\right) \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d + \mu \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \varrho_0' \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d.
\end{aligned}$$

Das Dachprodukt davon mit

$$v = \sum_{j=0}^{d} \beta_j \varrho_j + \beta \varrho_0'$$

ist

$$\begin{aligned}\left(\lambda\widehat{\Psi} + \mu\widehat{\Psi}'\right) \wedge v =& \left(\left(\lambda + \mu \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^i\right)\beta + \mu \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \beta_i (-1)^{1+d-i}\right) \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_0' \\ =& L_{\lambda,\mu}\left(\beta_0, \ldots, \beta_d, \beta\right) \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_0'.\end{aligned}$$

Somit entspricht jede Nullstelle der Linearform

$$L_{\lambda,\mu}\left(\beta_0, \ldots, \beta_d, \beta\right) := \beta \left(\lambda + \mu \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^i\right) + \sum_{i=0}^{d} \beta_i \left(\mu\alpha_i(-1)^{1+d-i}\right)$$

einem Vektor $v = \sum\limits_{j=0}^{d} \beta_j \varrho_j + \beta \varrho_0'$ mit

$$\left(\lambda\widehat{\Psi} + \mu\widehat{\Psi}'\right) \wedge v = 0.$$

Da die Lösungsmenge von $L_{\lambda,\mu}\left(\beta_0, \ldots, \beta_d, \beta\right) = 0$ die Dimension $(d+1)$ hat, ist dann $(*)$ bewiesen.

$ii) \Longrightarrow i)$: Sei

$$\Psi = \mathbb{P}(\varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d) : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow B$$

eine lokale Parametrisierung um einen allgemeinen Punkt von $B$. Da $X$ kein linearer Raum ist, also nicht abwickelbar vom Rang 0 ist, ist nach dem Satz 8.4 die Abwickelbarkeit vom Rang 1 von $X$ mit $B = \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ äquivalent zu

$$\dim \operatorname{span}\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \varrho_0', \ldots, \varrho_d'\} \leq n + 1.$$

Wir beweisen, daß wenn fast überall

$$\dim \operatorname{span}\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \varrho_0', \ldots, \varrho_d'\} = n + r$$

mit $r > 1$ ist, die Aussage $ii)$ nicht gilt. Dafür reicht es zu zeigen, daß $\widehat{\Psi}' \in \mathrm{T}_{\widehat{\Psi}(0)}\widehat{B}$ nicht in $\mathrm{G}(d+1, N+1)$ ist, d.h.

$$\dim\{v \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \widehat{\Psi}' \wedge v = 0\} < d + 1.$$

Da $\widehat{\Psi}(0)$ allgemein war, dürfen wir nach Umnumerierung annehmen, daß $\varrho_0(0), \ldots, \varrho_d(0), \varrho'_0(0), \ldots, \varrho'_r(0)$ linear unabhängig sind.

Ab sofort denken wir uns wieder alle Funktionen an der Stelle 0 ausgewertet.

Da für $i \in \{0, \ldots, d\}$

$$\varrho'_i \in \operatorname{span}\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \varrho'_0, \ldots, \varrho'_r\}$$

existieren eindeutig bestimmte $\alpha_i^j, \beta_i^k \in \mathbb{C}$ mit

$$\varrho'_i = \sum_{j=0}^{d} \alpha_i^j \varrho_j + \sum_{k=0}^{r} \beta_i^k \varrho'_k,$$

insbesondere für $i \leq r$ ist natürlich $\alpha_i^j = 0$ und $\beta_i^k = \delta_i^k$ für alle $k$ und $j$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}' &= \sum_{i=0}^{d} \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho'_i \wedge \ldots \wedge \varrho_d \\
&= \sum_{i=0}^{d} \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \left( \sum_{j=0}^{d} \alpha_i^j \varrho_j + \sum_{k=0}^{r} \beta_i^k \varrho'_k \right) \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d \\
&= \left( \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^i \right) \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d + \sum_{i=0}^{d} \sum_{k=0}^{r} \beta_i^k \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \varrho'_k \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d.
\end{aligned}$$

Jetzt bilden wir das Dachprodukt von $\widehat{\Psi}'$ mit einem beliebigen Vektor $v \in \mathbb{C}^{N+1}$, den wir in der Form

$$v = \sum_{j=0}^{d} \lambda_j \varrho_j + \sum_{l=0}^{r} \mu_l \varrho'_l + \nu w$$

schreiben mit $\lambda_j, \mu_k, \nu \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \operatorname{span}\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \varrho'_0, \ldots, \varrho'_d\}$ und setzen dies 0.

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & \widehat{\Psi}' \wedge v \\
= \quad & \sum_{l=0}^{r}\left(\sum_{i=0}^{d}\alpha_i^i\right)\mu_l \; \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_l' \\
& + \left(\sum_{i=0}^{d}\alpha_i^i\right)\nu \qquad \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge w \\
& + \sum_{i=0}^{d}\sum_{k=0}^{r}\beta_i^k\lambda_i \qquad \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \varrho_k' \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_i \\
& + \sum_{i=0}^{d}\sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{r}\beta_i^k\mu_l \; \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \varrho_k' \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_l' \\
& + \sum_{i=0}^{d}\sum_{k=0}^{r}\beta_i^k\nu \qquad \varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \varrho_k' \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge w.
\end{aligned}
$$

Da $\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \varrho_0', \ldots, \varrho_r', w$ linear unabhängig sind, sind Dachprodukte von Teilmengen davon wieder linear unabhängig. Wir suchen jetzt zu einigen dieser Dachprodukte die Koeffizienenten in der Summe heraus, die ja alle verschwinden müssen.

Der Koeffizient von $\varrho_0' \wedge \varrho_1 \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge w$ ist $\beta_0^0\nu = \nu$, also ist $\nu = 0$. Die Koeffizienten von $\varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_{i-1} \wedge \varrho_k' \wedge \varrho_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_l'$ für $l \neq k$ sind $\beta_i^k\mu_l - \beta_i^l\mu_k$, für $i = k$ ergibt sich $\beta_k^k\mu_l - \beta_k^l\mu_k = \mu_l - 0 = \mu_l$, daher auch $\mu_l = 0$ für alle $l \in \{0, \ldots, r\}$. Schließlich erhalten wir für die Koeffizienten von $\varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d \wedge \varrho_l'$ noch $-\sum_{i=0}^{d}\beta_i^k\lambda_i$, da $\beta_i^k = \delta_i^k$ ist, sind dies $r+1$ linear unabhängige Gleichungen in den $\lambda_i$. Damit ist

$$
\dim\{v \in \mathbb{C}^{N+1} \mid \widehat{\Psi}' \wedge v = 0\} \leq (d+1) - (r+1) < d+1 \qquad \square
$$

Was passiert, wenn $\dim B > 1$?

Für die Richtung $ii) \Longrightarrow i)$ gilt die folgende Verallgemeinerung.

**Korollar 11.3**

*Sei $B \subseteq \mathbb{G}(d,N)$ eine irreduzible, $r$-dimensionale Varietät, so daß $X = \bigcup_{\Lambda \in B}\Lambda$ eine $n = (r+d)$-dimensionale Varietät ist und $\mathbb{T}_\Lambda B \subseteq \mathbb{G}(d,N)$ für alle $\Lambda \in B_{\mathrm{sm}}$ gilt.*

*Dann sind für alle $\Lambda \in B$ die Tangentialräume an $X$ für Punkte aus $\Lambda \cap X_{sm}$ gleich, insbesondere ist $X$ abwickelbar vom Grad mindestens $d$.*

*Falls $X$ abwickelbar vom Grad $d$ ist, gilt zusätzlich $B = \mathrm{Im}\ker \mathrm{d}\gamma$.*

*Beweis.* Wir wählen wieder eine lokale Parametrisierung

$$\Psi = \mathbb{P}(\varrho_0 \wedge \ldots \wedge \varrho_d) : (\mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow B$$

um einen allgemeinen Punkt von $B_{\mathrm{sm}}$.
Wir halten nun alle Koordinaten bis auf die $j$-te fest, dann haben wir im Beweis der Richtung $ii) \Longrightarrow i)$ des Satzes gezeigt, daß

$$\dim \operatorname{span}\left\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}, \ldots, \frac{\partial \varrho_d}{\partial s_j}\right\} \leq d+2.$$

Da bereits $\dim \operatorname{span}\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d\} = d+1$ ist, folgt

$$\dim \operatorname{span}\left\{\varrho_i, \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_j} \mid i \in \{0, \ldots, d\},\ j \in \{1, \ldots, r\}\right\} \leq d+1+r = n+1.$$

Damit folgen aus dem Satz 8.4 die Behauptungen. □

Für $\dim B > 1$ ist die Richtung $i) \Longrightarrow ii)$ falsch. Denn für abwickelbares $X$ würde für jedes $\Lambda \in (\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma)_{\mathrm{sm}}$ gelten, daß $\mathbb{T}_\Lambda(\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma) \subseteq \mathbb{G}(d, N)$. Somit gälte auch für jede Untervarietät $B' \subseteq \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$, daß $\mathbb{T}_\Lambda B' \subseteq \mathbb{T}_\Lambda(\operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma) \subseteq \mathbb{G}(d, N)$ für $\Lambda \in B'_{\mathrm{sm}}$. Folglich wäre dann auch $X' = \bigcup_{\Lambda \in B'} \Lambda$ abwickelbar, so daß für alle $\Lambda \in B'$ die Tangentialräume von $X'$ in den Punkten von $\Lambda \cap X'_{\mathrm{sm}}$ gleich sind.

Wir zeigen an userem alten Beispiel aus Abschitt 7, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist.
$B = \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma$ war geben als das Bild von

$$\begin{array}{llll} L: & \mathbb{P}_2 & \dashrightarrow & \mathbb{G}(1,4) \\ & (s:t:u) & \longmapsto & \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} u^4 \\ s^2t^2 \\ 0 \\ -2stu^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u^2 \\ 0 \\ s^2 \\ -2st \\ 2tu \end{pmatrix}\right\}. \end{array}$$

Wir wählen jetzt darin eine Kurve als das Bild von

$$\begin{array}{cccc} c: & \mathbb{P}_1 & \dashrightarrow & \mathbb{G}(1,4) \\ & (s:u) & \longmapsto & \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} u^4 \\ s^4 \\ 0 \\ -2s^2u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u^2 \\ 0 \\ s^2 \\ -2s^2 \\ 2su \end{pmatrix} \right\}, \end{array}$$

die wir durch Gleichsetzen von $s$ und $t$ erhalten und definieren $X' = \bigcup_{\Lambda \in \operatorname{Im} c} \Lambda$. Auf der Karte $u = 1$ haben wir

$$\begin{array}{cccc} c|_{\mathbb{C}}: & \mathbb{C} & \dashrightarrow & \mathbb{G}(1,4) \\ & s & \longmapsto & \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ s^4 \\ 0 \\ -2s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ s^2 \\ -2s^2 \\ 2s \end{pmatrix} \right\}. \end{array}$$

Damit erhalten wir $\widehat{X'}$ lokal als das Bild von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \widehat{X} \\ (s,t) & \longmapsto & t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ s^4 \\ 0 \\ -2s^2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ s^2 \\ -2s^2 \\ 2s \end{pmatrix} \end{array}$$

und fast überall gilt

$$\dim \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ s^4\\ 0\\ -2s^2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ s^2\\ -2s^2\\ 2s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ s^4\\ 0\\ -2s^2\\ 0\end{pmatrix}', \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ s^2\\ -2s^2\\ 2s\end{pmatrix}'\right\}$$

$$= \dim \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ s^4\\ 0\\ -2s^2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ s^2\\ -2s^2\\ 2s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 4s^3\\ 0\\ -4s\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2s\\ -4s\\ 2\end{pmatrix}\right\} = 4 > 3.$$

Daher sind nach Satz 8.4 die Tangentialebenen an $X'$ in den Punkten von $\Lambda \cap X_{\mathrm{sm}}$ für $\Lambda \in \operatorname{Im} c$ im allgemeinen verschieden.

# Kapitel 12

# Abwickelbare Varietäten vom Grad 1

Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine $n$-dimensionale, irreduzible Varietät, die abwickelbar vom Grad 1 ist und $B = \operatorname{Im} \ker \mathrm{d}\gamma \subseteq \mathbb{G}(1,N)$, dann haben wir gerade gesehen, daß nicht jede Fläche, die die Vereinigung der Geraden einer Kurve $C \subseteq B$ ist, abwickelbar bezüglich dieser Faserung ist. Es stellt sich natürlich die Frage, ob es überhaupt solche Flächen gibt. Wir wollen jetzt die Bedingungen untersuchen, unter denen wir wenigstens Kurvenstücke $C$ in $B$ finden können, so daß die Vereinigung dieser Geraden abwickelbar bezüglich dieser Faserung ist. Die Idee dazu stammt wiederum von Griffiths und Harris [GH1, (2.21)], wir wollen dies hier mit Hilfe des Satzes 8.4 erläutern.

Sei dazu $y \in \widehat{X}_{\mathrm{sm}} \setminus \widehat{\operatorname{Sing}\gamma}$ ein Punkt von $\widehat{X}$, zu dem es nach dem Satz 8.4 eine lokale Parametrisierung von $\widehat{X}$ der Form

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{C}^{n-1},0) \times (\mathbb{C}^2, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & t_0\varphi(s) + t_1\psi(s) \end{array}$$

gibt, wobei $\varphi, \psi : (\mathbb{C}^{n-1},0) \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ holomorphe Abbildungen sind mit

$$\begin{aligned} &\operatorname{span}\left\{\varphi, \psi, \frac{\partial\varphi}{\partial s_j}, \frac{\partial\psi}{\partial s_j} \mid j \in \{1,\dots,n-1\}\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\varphi, \psi, \frac{\partial\varphi}{\partial s_j} \mid j \in \{1,\dots,n-1\}\right\} \end{aligned}$$

und
$$\dim \operatorname{span}\left\{\varphi, \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \mid j \in \{1, \ldots, n-1\}\right\} = n+1.$$

Aus dieser lokalen Parametrisierung von $\widehat{X}$ erhalten wir nach Korollar 8.5 eine lokale Parametrisierung von $B$, nämlich
$$\begin{array}{rccc}\Psi: & (\mathbb{C}^{n-1},0) & \longrightarrow & \mathbb{G}(1,N) \\ & s & \longmapsto & \operatorname{span}\{\varphi(s),\psi(s)\}.\end{array}$$

Wir suchen jetzt ein Kurvenstück $c : (\mathbb{C},0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n-1},0)$, $c'(0) \neq 0$, so daß die Vereinigung der Geraden $\Psi \circ c$ abwickelbar bezüglich der Geraden ist. Nach Satz 8.4 ist das äquivalent zu
$$\dim \operatorname{span}\{\varphi \circ c, \psi \circ c, (\varphi \circ c)', (\psi \circ c)'\} \leq 3.$$

Da
$$\frac{\partial \psi}{\partial s_j} \in \operatorname{span}\left\{\varphi, \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-1}}\right\},$$
gibt es holomorphe Funktionen $\lambda_j, \mu_j, \alpha_{ij} : (\mathbb{C}^{n-1},0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit
$$\frac{\partial \psi}{\partial s_j} = \lambda_j \varphi + \mu_j \psi + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial s_j}.$$

Wir bezeichnen die Matrix $(\alpha_{ij})$ mit $A$.

Nun ist, wenn $c_j$ die Komponenten von $c$ bezeichnen,
$$\begin{aligned}
(\varphi \circ c)' &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} c_j' \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \circ c \\[1em]
(\psi \circ c)' &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} c_j' \frac{\partial \psi}{\partial s_j} \circ c \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} c_j' \left(\lambda_j \circ c \cdot \varphi \circ c + \mu_j \circ c \cdot \psi \circ c + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \circ c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \circ c\right) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \left(\lambda_j \circ c \cdot c_j'\right) \cdot \varphi \circ c + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\mu_j \circ c \cdot c_j'\right) \cdot \psi \circ c \\
&\quad \textstyle + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \circ c \cdot c_j'\right) \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} \circ c,
\end{aligned}$$

und damit wird aus $\dim \operatorname{span}\{\varphi\circ c, \psi\circ c, (\varphi\circ c)', (\psi\circ c)'\} \leq 3$

$$\dim \operatorname{span}\left\{\varphi\circ c, \psi\circ c, \sum_{j=1}^{n-1} c_j' \frac{\partial\varphi}{\partial s_j}\circ c, \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{ij}\circ c\cdot c_j'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}\circ c\right\} \leq 3.$$

Wir tragen die Koeffizienten der vier Vektoren bezüglich der linear unabhängigen Vektoren $\varphi\circ c, \psi\circ c, \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\circ c, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial s_{n-1}}\circ c$ als Spalten in eine Matrix ein und schließen weiter:

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & c' & A\circ c\cdot c' \end{array}\right) \leq 3$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c|c} c' & A\circ c\cdot c' \end{array}\right) \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow c' \text{ ist Eigenvektor von } A\circ c.$$

Wir nehmen jetzt an, daß $\lambda$ ein einfacher Eigenwert von $A(0)$ ist. Wenn sich dann $A(s)$ holomorph ändert, ändert sich auch $\lambda(s)$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $A(s)$ holomorph und bleibt damit ein einfacher Eigenwert in einer kleinen Umgebung von 0. Die dazugehörigen Eigenräume $\operatorname{Eig}(A(s), \lambda(s))$ bilden ein Richtungsfeld auf $B$. Eine lokale Integralkurve $c : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (B, \Lambda)$ ist dann unser gesuchtes Kurvenstück. Das dadurch entstandende zweidimensionale Flächenstück $\bigcup_{s\in(\mathbb{C},0)} c(s)$ ist nach Konstruktion abwickelbar.

Wir haben gezeigt:

**Satz 12.1**
*Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine irreduzible Varietät, die abwickelbar vom Grad 1 ist und $x \in X_{\mathrm{sm}} \setminus \operatorname{Sing}\gamma$, dann liegt $x$ auf mindestens $l$ verschiedenen zweidimensionalen abwickelbaren Flächenstücken, die in $X$ enthalten sind. Dabei ist $l$ die Anzahl der einfachen Eigenwerte von $A(s)$.*

*Bemerkung.* Da die allgemeine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix $n-1$ verschiedene Eigenwerte hat, besteht die Vermutung, daß für den allgemeinen Punkt einer allgemeinen abwickelbaren Varietät die auftretende Matrix $n-1$ verschiedene

Eigenwerte hat. Um diese Aussage jedoch präzisieren zu können, müßte man einen Modulraum der abwickelbaren Varietäten vom Grad 1 kennen.

*Bemerkung.* Der Satz bleibt auch für vom Grad $d > 1$ abwickelbare Varietäten richtig. Denn statt der „optimalen“ Parametrisierung aus Satz 8.4 von $\widehat{X}$ um den glatten Punkt $y \in \widehat{X} \setminus \widehat{\operatorname{Sing} X}$

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^r, 0) \times (\mathbb{C}^{d+1}, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ & (s,t) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d} t_i \varrho_i(s) \end{array}$$

kann man die Parametrisierung

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{n-1}, 0) \times (\mathbb{C}^2, e_0) & \longrightarrow & (\widehat{X}, y) \\ (s,t) = (s_1, \ldots, s_{n-1}, t_0, t_1) & \longmapsto & t_0 \varphi(s) + t_1 \psi(s) \end{array}$$

verwenden, wobei

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, \ldots, s_{n-1}) &:= \varrho_0(s_1, \ldots, s_r) + s_{r+1} \varrho_1(s_1, \ldots, s_r) + \ldots \\ &\qquad + s_{n-1} \varrho_{d-1}(s_1, \ldots, s_r) \\ \psi(s_1, \ldots, s_{n-1}) &:= \varrho_d(s_1, \ldots, s_r) \end{aligned}$$

Da die Tagentialräume von $\widehat{X}$ entlang $\operatorname{span}\{\varrho_0(s_1, \ldots, s_r), \ldots, \varrho_d(s_1, \ldots, s_r)\}$ konstant sind, sind sie auch konstant entlang Unterräumen davon, inbesondere also entlang $\operatorname{span}\{\varphi(s_1, \ldots, s_{n-1}), \psi(s_1, \ldots, s_{n-1})\}$ für $s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{C}$ beliebig. Damit ist die Bedingung *i*) des Satz 8.4 und somit auch die Bedingungen *ii*) und *iii*) erfüllt. Das reicht aus, um das Beweisverfahren anzuwenden.

# Kapitel 13

# Tangentenvarietäten

Die einfachsten Beispiele hatten wir bereits zu Anfang erwähnt. Die Tangentenvarietät einer Kurve $C$, die keine Gerade ist, ist entweder $\mathbb{P}_2$, falls die Kurve planar war, oder eine vom Grad 1 abwickelbare Fläche $X$, bei der die Gaußabbildung entlang der Tangenten der Kurve konstant ist, genauer $\operatorname{Im}\gamma_C = \operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma_X$. Für die höherdimensionalen Analoga, den Tangentenvarietäten, hatten Griffiths und Harris bemerkt [GH1, 5b], daß diese sämtlich abwickelbar sind. Bevor wir eine leichte Verschärfung davon beweisen, wollen wir uns noch einige Beispiele anschauen.

Dazu müssen wir erst einmal einige Tangentenvarietäten berechnen. Dies läßt sich am einfachsten durchführen, wenn $X$ als das Bild einer rationalen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P}_n \dashrightarrow X$$

gegeben ist. Dann ist die Tangentenvarietät

$$\tau(X) = \overline{\bigcup_{x \in X_{\mathrm{sm}}} \mathbb{T}_x X} = \bigcup_{\Lambda \in \operatorname{Im}\gamma_X} \Lambda$$

das Bild von

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n & \dashrightarrow & \mathbb{P}_N \\ & (s,t) & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\sum\limits_{j=0}^{n} t_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_j}(s)\right), \end{array}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial s_j}$ ist dabei so zu verstehen, daß man $\varphi$ als $(n+1)$-Tupel von homogenen Polynomen schreibt und diese dann nach $s_j$ ableitet. Daß $\operatorname{Im}\tau = \tau(X)$ ist, folgt daher, daß $\tau(X)$ nach Satz B.1 und A.4 irreduzibel ist, $\tau(X)$ das Bild von $\tau$ enthält und $\tau(s,-)$ bereits für fast alle $s \in \mathbb{P}_n$ den Tangentialraum $\mathbb{T}_{\varphi(s)}X$ parametrisiert. Jetzt kann mit Hilfe von Gröbnerbasen das beschreibende Ideal von $\tau(X)$ konstruiert werden.

Die einfachste nicht-lineare, rationale Varietät ist die Veronesefläche $V$. Diese ist das Bild von

$$\begin{array}{rccc} v: & \mathbb{P}_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}_5 \\ & (s_0 : s_1 : s_2) & \longmapsto & (s_0^2 : s_1^2 : s_2^2 : s_0 s_1 : s_0 s_2 : s_1 s_2) \end{array}$$

und durch die Gleichungen

$$V = \left\{ (X_0 : \ldots : X_5) \in \mathbb{P}_5 \mid \operatorname{rank} \begin{pmatrix} X_0 & X_3 & X_4 \\ X_3 & X_1 & X_5 \\ X_4 & X_5 & X_2 \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$$

beschrieben. Die Tangentenfläche ist dann das Bild von

$$\begin{array}{rcc} \tau: \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}_5 \\ (s,t) & \longmapsto & (2s_0t_0 : 2s_1t_1 : 2s_2t_2 : s_0t_1 + s_1t_0 : s_0t_2 + s_2t_0 : s_1t_2 + s_2t_1) \end{array}$$

und ist gegeben durch die Gleichung [H, p. 144]

$$F := \det \begin{pmatrix} X_0 & X_3 & X_4 \\ X_3 & X_1 & X_5 \\ X_4 & X_5 & X_2 \end{pmatrix} = X_0X_1X_2 + 2X_3X_4X_5 - X_1X_4^2 - X_0X_5^2 - X_2X_3^2.$$

Die Hessematrix davon ist

$$\operatorname{Hess} F = \begin{pmatrix} 0 & X_2 & X_1 & 0 & 0 & -2X_5 \\ X_2 & 0 & X_0 & 0 & -2X_4 & 0 \\ X_1 & X_0 & 0 & -2X_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2X_3 & -2X_2 & 2X_5 & 2X_4 \\ 0 & -2X_4 & 0 & 2X_5 & -2X_1 & 2X_3 \\ -2X_5 & 0 & 0 & 2X_4 & 2X_3 & -2X_0 \end{pmatrix}.$$

Man stellt fest, daß $F$ jeden 5-Minor, aber nicht alle 4-Minoren von $\operatorname{Hess} F$ teilt, d.h. der Rang von $\operatorname{Hess} F$ auf $\mathrm{V}(F)$ ist im allgemeinen 4. Damit ist $\tau(V)$ nach Satz 5.2 abwickelbar vom Grad 2.

Nun haben wir zwei Faserungen von $\tau(V)$ in zweidimensionale Räume, einerseits durch die Abwickelung, $\operatorname{Im}\ker \mathrm{d}\gamma_{\tau(V)}$, und andererseits durch die Tangentialräume von $V$, $\operatorname{Im}\gamma_V$. Im Gegensatz zum Kurvenfall sind diese beiden Faserungen nicht gleich!

Denn die Gaußabbildung von $V$ ergibt die Faserung

$$\begin{aligned} \gamma_V \circ v : \quad \mathbb{P}_2 &\longrightarrow \mathbb{G}(2,5) \\ s &\longmapsto \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial v}{\partial s_0}(s), \frac{\partial v}{\partial s_1}(s), \frac{\partial v}{\partial s_2}(s) \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2s_0 \\ 0 \\ 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2s_1 \\ 0 \\ s_0 \\ 0 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2s_2 \\ 0 \\ s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wäre dies die Faserung der Abwickelung, so müßte nach Satz 8.4

$$\dim\operatorname{span}\left\{ \frac{\partial v}{\partial s_0}, \frac{\partial v}{\partial s_1}, \frac{\partial v}{\partial s_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial s_0^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial s_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial s_2^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial s_0 \partial s_1}, \frac{\partial^2 v}{\partial s_0 \partial s_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial s_1 \partial s_2} \right\} \leq 5$$

sein, es ist aber

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2s_0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2s_2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & s_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s_2 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6.$$

Das zweite und mehr typische Beispiel, das wir untersuchen wollen, ist die Tangentenvarietät des Bildes der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{P}_2 &\longrightarrow \mathbb{P}_5 \\ (s_0 : s_1 : s_2) &\longmapsto (s_0^3 : s_1^3 : s_2^3 : s_0 s_1 s_2 : s_0^2 s_2 : s_1 s_2^2). \end{aligned}$$

Die Tangentenfläche ist dann das Bild von

$$\begin{array}{rlcl}\tau: & \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}_5 \\ & (s,t) & \longmapsto & (3s_0^2t_0 : 3s_1^2t_1 : 3s_2^2t_2 : s_0s_1t_2 + s_0s_2t_1 + s_1s_2t_0 : \\ & & & \qquad s_0^2t_2 + 2s_0s_2t_0 : 2s_1s_2t_2 + s_2^2t_1).\end{array}$$

Dies ist gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
F = {}& -X_0^6X_1^3X_2^7 - 24X_0^5X_1^2X_2^6X_3^3 - 192X_0^4X_1X_2^5X_3^6 - 512X_0^3X_2^4X_3^9 + 3X_0^4X_1^3X_2^6X_4^3 \\
& + 48X_0^3X_1^2X_2^5X_3^3X_4^3 + 192X_0^2X_1X_2^4X_3^6X_4^3 - 3X_0^2X_1^3X_2^5X_4^6 - 24X_0X_1^2X_2^4X_3^3X_4^6 - 108X_1X_2^3X_3^6X_4^6 \\
& + X_1^3X_2^4X_4^9 + 90X_0^4X_1^2X_2^5X_3^2X_4^2X_5 + 792X_0^3X_1X_2^4X_3^5X_4^2X_5 + 576X_0^2X_2^3X_3^8X_4^2X_5 \\
& - 180X_0^2X_1^2X_2^4X_3^2X_4^5X_5 - 144X_0X_1X_2^3X_3^5X_4^5X_5 + 90X_1^2X_2^3X_3^2X_4^8X_5 - 108X_0^5X_1^2X_2^5X_3X_4X_5^2 \\
& - 432X_0^4X_1X_2^4X_3^4X_4X_5^2 + 3456X_0^3X_2^3X_3^7X_4X_5^2 + 216X_0^3X_1^2X_2^4X_3X_4^4X_5^2 - 1917X_0^2X_1X_2^3X_3^4X_4^4X_5^2 \\
& - 108X_0X_1^2X_2^3X_3X_4^7X_5^2 + 729X_1X_2^2X_3^4X_4^7X_5^2 - 12X_0^6X_1^2X_2^5X_5^3 + 1104X_0^5X_1X_2^4X_3^3X_5^3 \\
& - 2064X_0^4X_2^3X_3^6X_5^3 + 78X_0^4X_1^2X_2^4X_4^3X_5^3 + 516X_0^3X_1X_2^3X_3^3X_4^3X_5^3 - 3888X_0^2X_2^2X_3^6X_4^3X_5^3 \\
& - 120X_0^2X_1^2X_2^3X_4^6X_5^3 + 540X_0X_1X_2^2X_3^3X_4^6X_5^3 + 54X_1^2X_2^2X_4^9X_5^3 - 2844X_0^4X_1X_2^3X_3^2X_4^2X_5^4 \\
& - 4608X_0^3X_2^2X_3^5X_4^2X_5^4 + 2682X_0^2X_1X_2^2X_3^2X_4^5X_5^4 - 1458X_1X_2X_3^2X_4^8X_5^4 + 7776X_0^4X_2^2X_3^4X_4X_5^5 \\
& + 972X_0^3X_1X_2^2X_3X_4^4X_5^5 + 7776X_0^2X_2X_3^4X_4^4X_5^5 - 324X_0X_1X_2X_3X_4^7X_5^5 - 48X_0^6X_1X_2^3X_5^6 \\
& - 2112X_0^5X_2^2X_3^3X_5^6 + 696X_0^4X_1X_2^2X_4^3X_5^6 - 5184X_0^3X_2X_3^3X_4^3X_5^6 - 1485X_0^2X_1X_2X_4^6X_5^6 \\
& + 729X_1X_4^9X_5^6 - 2448X_0^4X_2X_3^2X_4^2X_5^7 - 3888X_0^2X_3^2X_4^5X_5^7 + 1728X_0^5X_2X_3X_4X_5^8 \\
& + 5184X_0^3X_3X_4^4X_5^8 - 64X_0^6X_2X_5^9 - 1728X_0^4X_4^3X_5^9.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß die Gleichungen auch bei relativ einfachen Beispielen bereits sehr kompliziert werden. Nach langem Rechnen auf einem Computer findet man, daß $F$ die Determinante, jedoch nicht alle 5-Minoren von $\operatorname{Hess} F$ teilt, damit ist die Tangentenvarietät abwickelbar vom Grad 1.

Als letztes wollen wir noch Beispiele für Varietäten geben, die selber nicht abwickelbar sind, deren Tangentenvarietäten jedoch hochgradig abwickelbar sind. Dabei sollen zusätzlich noch die Tangentenvarietäten nicht linear sein.

Sei dafür

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_N$$

eine nicht-degenerierte Kurve, d.h. $\operatorname{Im}\varphi$ ist in keiner Hyperebene enthalten. Wir definieren $X \subseteq \mathbb{P}_N$ als das Bild von

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}_N \\ (s,t) & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \dfrac{\partial^{2(n-1)}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s)\right),\end{array}$$

dabei soll $2n < N$ sein. Folglich ist $\tau(X)$ das Bild von

$$\tau(s,t,\mu,\lambda) = \mathbb{P}\left(\mu_0 \sum_{i=0}^{n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i+1}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) + \mu_1 \sum_{i=0}^{n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-i)-1}}(s) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial^{2(n-1)}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s)\right),$$

wobei $(s,t,\mu,\lambda) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_{n-1}$ durchläuft.

Mit der Eulerformel

$$c\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) = s_0 \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i+1}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) + s_1 \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-i)-1}}(s),$$

wobei $c := \deg \frac{\partial^{2(n-1)}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-1-i)}}$, erhalten wir

$$\mu_0\sum_{i=0}^{n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i+1}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) + \mu_1\sum_{i=0}^{n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-i)-1}}(s) + \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i \frac{\partial^{2(n-1)}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s)$$

$$= \mu_0 \sum_{i=0}^{n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i+1}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) + \mu_1 \sum_{i=0}^{n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-i)-1}}(s) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i/c \left(s_0 \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i+1}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) + s_1 \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-i)-1}}(s)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\mu_0 t_i + s_0\lambda_i/c) \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i+1}\partial s_1^{2(n-1-i)}}(s) + \sum_{i=0}^{n-1} (\mu_1 t_i + s_1\lambda_i/c) \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{2i}\partial s_1^{2(n-i)-1}}(s).$$

Da sich für $\mu_0 s_1 - \mu_1 s_0 \neq 0$ mit $(\mu_0 t_i + s_0\lambda_i/c, \mu_1 t_i + s_1\lambda_i/c)$ für geeignete $t_i, \lambda_i$ alle Zahlenpaare in $\mathbb{C}^2$ erzeugen lassen, ist $\tau(X)$ auch das Bild von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_{2n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}_N \\ (s,t) & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{2n-1} t_i \frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial s_0^{i}\partial s_1^{2n-1-i}}(s)\right), \end{array}$$

d.h. $\tau(X)$ ist das Bild der $(2n-1)$-ten oskulierenden Kurve an die Kurve $\varphi$. Da $\varphi$ nicht degeneriert war, hat $\tau(X)$ die Dimension $2n$ und ist nicht linear

[P, Lemma 3.2], also abwickelbar vom Grad 1. Nachträglich sehen wir noch, daß wie erwartet $\dim X = \dim \tau(X)/2 = n$ war.

Wir zeigen jetzt allgemein

**Satz 13.1**
*Sei $X \subseteq \mathbb{P}_N$ eine nicht-lineare, vom Grad $d$ abwickelbare Varietät, dann ist die Tangentenvarietät $\tau(X)$ abwickelbar vom Grad mindestens $d+1$. Die $(d+1)$-dimensionalen Räume, entlang derer die Gaußabbildung von $\tau(X)$ auf jeden Fall konstant ist, liegen in den Tangentialräumen von $X$.*

*Beweis.* $\tau(X)$ ist irreduzibel, da $\operatorname{Im}\gamma_X$ nach Satz B.1 und $\tau(X) = \bigcup_{\Lambda\in\operatorname{Im}\gamma_X} \Lambda$ nach Satz A.4 irreduzibel ist.

Es reicht, die restlichen Aussagen auf einer offenen Menge von $X$ zu beweisen, da sie sich dann durch die üblichen Argumente mit der Halbstetigkeit der Faserdimension bzw. der Abgeschlossenheit des Enthaltenseins auf ganz $\tau(X)$ fortsetzen lassen. Wir wählen eine nach Satz 8.4 existierende lokale Parametrisierung von $\widehat{X}$

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{C}^r,0)\times(\mathbb{C}^{d+1},e_0) & \longrightarrow & \widehat{X} \\ & (s,t) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i\varrho_i(s), \end{array}$$

dabei ist dann

$$\mathrm{T}_{\Phi(s,t)}\widehat{X} = \operatorname{span}\left\{\varrho_0(s),\dots,\varrho_d(s),\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_1}(s),\dots,\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_r}(s)\right\}.$$

Somit ist $\widehat{\tau(X)}$ lokal das Bild von

$$\begin{array}{rccc} \tau: & (\mathbb{C}^r,0)\times(\mathbb{C}^{n+1},e_0) & \longrightarrow & \widehat{\tau(X)} \\ & (s,t) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i\varrho_i(s) + \sum\limits_{j=1}^{r} t_{d+j}\frac{\partial\varrho_0}{\partial s_j}(s). \end{array}$$

Das Differential von $\tau$ ist

$$\mathrm{d}\tau(s,t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_1}(s) + \sum\limits_{j=1}^{r} t_{d+j}\frac{\partial^2\varrho_0}{\partial s_1\partial s_j}(s) & \dots & \sum\limits_{i=0}^{d} t_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial s_r}(s) + \sum\limits_{j=1}^{r} t_{d+j}\frac{\partial^2\varrho_0}{\partial s_r\partial s_j}(s) \\ \varrho_0(s) \ \dots \ \varrho_d(s) \ \frac{\partial\varrho_0}{\partial s_1}(s) \ \dots \ \frac{\partial\varrho_0}{\partial s_r}(s) \end{pmatrix}.$$

Nun muß nicht notwendig $\dim \widehat{\tau(X)} = r+n+1$ sein, folglich ist dann auch $\tau$ keine Parametrisierung. Um aus $\tau$ eine Parametrisierung zu gewinnen, halten wir einfach einige Variabeln fest. Wir zeigen jetzt, daß wir dafür $s$-Variabeln nehmen dürfen. Sei $m := \dim \widehat{\tau(X)} - (n+1)$, dann muß $\operatorname{rank} \mathrm{d}\tau(s,t) = m+n+1$ für fast alle $(s,t) \in (\mathbb{C}^r, 0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, e_0)$ sein. Sei $(\sigma, \lambda)$ ein solcher Punkt mit $\operatorname{rank} \mathrm{d}\tau(\sigma,\lambda) = m+n+1$.
Da $\varrho_0(\sigma), \ldots, \varrho_d(\sigma), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(\sigma), \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(\sigma)$ linear unabhängig sind, können wir aus $\mathrm{d}\tau(\sigma,\lambda)$ so $m+n+1$ linear unabhängige Spaltenvektoren auswählen, daß $\varrho_0(\sigma), \ldots, \varrho_d(\sigma), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(\sigma), \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(\sigma)$ dabei sind, d.h. nach eventueller Umnumerierung der $s_j$ sind die Spalten von $\mathrm{d}\tau(\sigma,\lambda)$, die zu den Ableitungen der Variablen $s_1, \ldots, s_m, t_0, \ldots, t_n$ gehören, linear unabhängig. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \tau' : & (\mathbb{C}^m, (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)) \times (\mathbb{C}^{n+1}, \lambda) & \longrightarrow & \widehat{\tau(X)} \\ & (s,t) & \longmapsto & \tau(s_1, \ldots, s_m, \sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_r, t) \end{array}$$

eine lokale Parametrisierung von $\widehat{\tau(X)}$. Für das weitere setzen wir zur Abkürzung $\widetilde{\sigma} := (\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_r)$.

Jetzt können wir dort die Gaußabbildung von $\widehat{\tau(X)}$

$$\widehat{\gamma}_{\tau(X)} \circ \tau' : (\mathbb{C}^m, (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)) \times (\mathbb{C}^{n+1}, \lambda) \longrightarrow \mathrm{G}(m+n+1, N+1)$$

ausrechnen:

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_{\tau(X)} \circ \tau'(s,t) = \operatorname{span} \Bigg\{ & \sum_{i=0}^{d} t_i \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_1}(s,\widetilde{\sigma}) + \sum_{j=1}^{r} t_{d+j} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial s_1 \partial s_j}(s,\widetilde{\sigma}), \ldots, \\ & \sum_{i=0}^{d} t_i \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_m}(s,\widetilde{\sigma}) + \sum_{j=1}^{r} t_{d+j} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial s_m \partial s_j}(s,\widetilde{\sigma}), \\ & \varrho_0(s,\widetilde{\sigma}), \ldots, \varrho_d(s,\widetilde{\sigma}), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(s,\widetilde{\sigma}), \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(s,\widetilde{\sigma}) \Bigg\} \\ = \operatorname{span} \Bigg\{ & \sum_{j=1}^{r} t_{d+j} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial s_1 \partial s_j}(s,\widetilde{\sigma}), \ldots, \sum_{j=1}^{r} t_{d+j} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial s_m \partial s_j}(s,\widetilde{\sigma}), \\ & \varrho_0(s,\widetilde{\sigma}), \ldots, \varrho_d(s,\widetilde{\sigma}), \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}(s,\widetilde{\sigma}), \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}(s,\widetilde{\sigma}) \Bigg\}, \end{aligned}$$

da $\frac{\partial \varrho_i}{\partial s_j} \in \operatorname{span}\left\{\varrho_0, \ldots, \varrho_d, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_r}\right\}$. Daran erkennt man, daß

$$\widehat{\gamma}_{\tau(X)} \circ \tau'(s, t_0, \ldots, t_n) = \widehat{\gamma}_{\tau(X)} \circ \tau'(s, \mu_0, \ldots, \mu_d, \mu t_{d+1}, \ldots, \mu t_n)$$

für $\mu_1, \ldots, \mu_d, \mu \in \mathbb{C}$, wo alles definiert ist, d.h. für festes $(s_1, \ldots, s_m)$ und $(t_{d+1}, \ldots, t_n)$ ist $\widehat{\gamma}_{\tau(X)}$ für alle Punkte $\tau'(s, \mu_0, \ldots, \mu_d, \mu t_{d+1}, \ldots, \mu t_n)$ gleich. Also ist $\widehat{\gamma}_{\tau(X)}$ in einer offenen Umgebung von $\tau'(\sigma, \lambda)$ auf dem $(d+1)$-dimensionalen linearen Raum

$$\operatorname{span}\left\{\varrho_0(s, \widetilde{\sigma}), \ldots, \varrho_d(s, \widetilde{\sigma}), \sum_{j=1}^{r} t_{d+j} \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(s, \widetilde{\sigma})\right\}$$

konstant. Damit muß $\widehat{\gamma}_{\tau(X)}$ nach dem Identitätssatz auf ganz

$$\operatorname{span}\left\{\varrho_0(s, \widetilde{\sigma}), \ldots, \varrho_d(s, \widetilde{\sigma}), \sum_{j=1}^{r} t_{d+j} \frac{\partial \varrho_0}{\partial s_j}(s, \widetilde{\sigma})\right\} \cap \widehat{\tau(X)}_{\mathrm{sm}}$$

konstant sein. Somit ergibt sich

$$\dim \operatorname{Im} \gamma_{\tau(X)} = \dim \operatorname{Im} \widehat{\gamma}_{\tau(X)} \leq n + m + 1 - (d+2) = n + m - d - 1.$$

Für die Varietät $\tau(X)$ erhalten wir, daß sie abwickelbar vom Grad mindestens $d+1$ ist, denn

$$\dim \tau(X) - \dim \operatorname{Im} \gamma_{\tau(X)} \geq (n+m) - (n+m-d-1) = d+1. \qquad \square$$

# Anhang A

# Die Grassmannvarietäten

Hier sollen die benutzten grundlegenden Tatsachen über Grassmannvarietäten zusammengefaßt werden. Die fehlenden Beweise sind in [H, 6] oder [P, 1] zu finden.

**Definition A.1**
*Die Grassmannvarietät* $\mathrm{G}(n, N)$ *für* $n, N \in \mathbb{N}$ *mit* $0 \leq n \leq N$ *ist die Menge der* $n$*–dimensionalen Untervektorräume des* $\mathbb{C}^N$*, i. Z.*

$$\mathrm{G}(n, N) := \{V < \mathbb{C}^N \mid \dim V = n\}.$$

*Analog setzt man für den projektiven Raum* $\mathbb{P}_N$

$$\mathbb{G}(n, N) := \{V < \mathbb{P}_N \mid \dim V = n\}.$$

Da den $(n+1)$–dimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{C}^{N+1}$ auf kanonische Weise $n$–dimensionale Unterräume des $\mathbb{P}_N$ entsprechen, kann man die $\mathrm{G}(n+1, N+1)$ mit der $\mathbb{G}(n, N)$ identifizieren, so daß diese beiden Schreibweisen nur eine unterschiedliche Interpretation andeuten.

Die Grassmannvarietäten werden durch die Plückereinbettung $\varepsilon$ zu einer glatten Varietät im projektiven Raum $\mathbb{P}(\bigwedge^n \mathbb{C}^N)$.

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathrm{G}(n, N) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^n \mathbb{C}^N) \\ & \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_n\} & \longmapsto & \mathbb{P}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n). \end{array}$$

Einer der üblichen Wege eine Karte von $\mathrm{G}(n,N)$ um $\Lambda \in \mathrm{G}(n,N)$ anzugeben, ist der folgende, vgl. [FW, (2.1)]:
Sei $e_1,\ldots,e_N$ eine Basis des $\mathbb{C}^N$, so daß $\Lambda = \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathrm{M}((N-n)\times n,\mathbb{C}),0) &\longrightarrow \qquad\qquad (\mathrm{G}(n,N),\Lambda) \\ \begin{pmatrix} a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \ldots & a_{N,n} \end{pmatrix} &\longmapsto \operatorname{span}\left\{e_1 + \sum_{i=n+1}^{N} a_{i1}e_i,\ldots,e_n + \sum_{i=n+1}^{N} a_{in}e_i\right\} \end{aligned}$$

eine Karte von $\mathrm{G}(n,N)$ um $\Lambda$.

Daraus folgt zum Beispiel, daß jeder holomorphe Abbildungskeim

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & (\mathbb{C}^r,0) & \longrightarrow & (\mathrm{G}(n,N),\Lambda) \\ & s & \longmapsto & \Psi(s) \end{array}$$

nach $\mathrm{G}(n,N)$ in der Form

$$\Psi(s) = \mathbb{P}(\varrho_1(s)\wedge\ldots\wedge\varrho_n(s))$$

mit holomorphen Abbildungen $\varrho_1,\ldots,\varrho_n : (\mathbb{C}^r,0)\longrightarrow\mathbb{C}^N$ geschrieben werden kann. Denn wenn $A(s) := \varphi^{-1}\circ\Psi$ ist, kann man

$$\varrho_j(s) := e_j + \sum_{i=n+1}^{N} a_{ij}(s)e_i$$

wählen.

Punkte in $\mathrm{G}(n,N)\subseteq\mathbb{P}(\bigwedge^n\mathbb{C}^N)$ sind wie folgt charakterisiert.

**Satz A.2**
*Für $\omega\in\bigwedge^n\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ sind äquivalent:*

*i)* $\mathbb{P}(\omega)\in\mathrm{G}(n,N)$

*ii)* $\dim\{w\in\mathbb{C}^N \mid w\wedge\omega = 0\} = n$

*iii)* $\dim\{w\in\mathbb{C}^N \mid w\wedge\omega = 0\} \le n$.

Für unsere Untersuchungen sind folgende Untervarietäten nützlich:

**Satz A.3**
*Die folgenden Mengen sind Varietäten.*

*i)* *Die Schubertvarietät* $\Sigma_l(L) := \{\Lambda \in \mathbb{G}(n, N) \mid \dim(L \cap \Lambda) \geq l\}$ *für einen linearen Raum* $L \subseteq \mathbb{P}_N$ *und* $0 \leq l \leq \min\{n, \dim L\}$.

*ii)* *Die Varietät* $\Sigma(S) := \{\Lambda \in \mathbb{G}(n, N) \mid S \subseteq \Lambda\}$ *für eine beliebige Teilmenge* $S \subseteq \mathbb{P}_N$.

*iii)* *Die Fahnenvarietät* $\mathrm{F}(n, n', N) := \{(V, W) \in \mathbb{G}(n, N) \times \mathbb{G}(n', N) \mid V \subseteq W\}$ *für* $0 \leq n \leq n' \leq N$.

*iv)* *Die Fanovarietät* $\mathrm{F}_n(X) := \{\Lambda \in \mathbb{G}(n, N) \mid \Lambda \subseteq X\}$ *für eine Varietät* $X \subseteq \mathbb{P}_N$.

Eine der typischen Anwendungen ist zum Beispiel, daß bei einer konvergenten Folge von Geraden in einer Varietät $X$ auch die Grenzgerade wieder in $X$ liegt, da $\mathrm{F}_1(X)$ nach dem Satz abgeschlossen ist.

Wir benötigen noch die folgende Irreduzibilitätsaussage für Varietäten, die eine Vereinigung von linearen Räumen sind.

**Satz A.4**
*Sei* $B \subseteq \mathbb{G}(n, N)$ *eine irreduzible Varietät, dann ist auch die Varietät*

$$X = \bigcup_{\Lambda \in B} \Lambda \subseteq \mathbb{P}_N$$

*irreduzibel.*

*Beweis.* Daß $X$ eine Varietät ist, besagt zum Beispiel [P, Satz 1.9].
Wir nehmen an, daß $X$ reduzibel ist, d.h. es gibt Varietäten $X_1, X_2 \subseteq X$ mit

$$X = X_1 \cup X_2 \qquad \text{und} \qquad X_1 \not\subseteq X_2, X_2 \not\subseteq X_1.$$

Wir definieren

$$B_1 := \mathrm{F}_n(X_1) \cap B = \{\Lambda \in B \mid \Lambda \subseteq X_1\}$$
$$B_2 := \mathrm{F}_n(X_2) \cap B = \{\Lambda \in B \mid \Lambda \subseteq X_2\}$$

und behaupten, daß dies eine Zerlegung von $B$ ergibt, also

$$B = B_1 \cup B_2 \qquad \text{und} \qquad B_1 \not\subseteq B_2, B_2 \not\subseteq B_1.$$

Wir zeigen zuerst, daß $B = B_1 \cup B_2$ ist. Wenn $\Lambda \in B$ ist, ist $\Lambda \subseteq X = X_1 \cup X_2$, damit muß aber $\Lambda \subseteq X_1$ oder $\Lambda \subseteq X_2$ sein, da $\Lambda$ als linearer Raum irreduzibel ist. Folglich $\Lambda \in B_1$ oder $\Lambda \in B_2$.

Daß nicht $B_1 \subseteq B_2$ sein kann, ist auch klar, denn daraus würde

$$\bigcup_{\Lambda \in B_1} \Lambda \subseteq \bigcup_{\Lambda \in B_2} \Lambda \subseteq X_2$$

folgen und weiter

$$X_1 \subseteq X = \bigcup_{\Lambda \in B} \Lambda = \bigcup_{\Lambda \in B_1 \cup B_2} \Lambda = \bigcup_{\Lambda \in B_1} \Lambda \cup \bigcup_{\Lambda \in B_2} \Lambda \subseteq X_2.$$

Wir haben damit gezeigt, daß $B$ reduzibel ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, folglich muß $X$ irreduzibel gewesen sein. $\square$

Zum Schluß erinnern wir uns noch an die bireguläre Dualität $\mathcal{D}$ (auch mit $*$ oder $^*$ bezeichnet).

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}: & \mathrm{G}(n,N) & \longrightarrow & \mathrm{G}(N-n,N) \\ & \Lambda & \longmapsto & \{v \in \mathbb{C}^N \mid v^{\mathrm{T}} \cdot w = 0 \ \ \forall\, w \in \Lambda\}. \end{array}$$

Es gelten die für eine Dualität üblichen Eigenschaften.

**Lemma A.5**

*i)* $\mathcal{D} \circ \mathcal{D} = \mathrm{id}$

*ii)* $V \subseteq W \iff \mathcal{D}(\mathcal{V}) \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{W})$

*iii)* *Für* $V \in \mathrm{G}(n,N)$ *und* $W \in \mathrm{G}(n',N)$ *gilt:*

- *(a)* $V \cap W = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{V}) + \mathcal{D}(\mathcal{W}))$
- *(b)* $V + W = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{W}))$

# Anhang B

# Rationale Abbildungen

In diesem Abschnitt soll kurz an die wichtigsten Eigenschaften von rationalen Abbildungen erinnert werden.

Eine rationale Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$ zwischen zwei Varietäten $X$ und $Y$ ist eine Äquivalenzklasse von Morphismen, die auf einer Zariski-offenen Teilmenge von $X$ definiert sind. Dabei sind zwei Morphismen äquivalent, wenn sie auf einer offenen Menge übereinstimmen. Der Definitionsbereich eines Repräsentanten von $f$ wird als ein Definitionsbereich von $f$ bezeichnet. Wir werden häufig rationale Abbildungen einfach in der Form

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \dashrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

schreiben, und darunter verstehen, daß $x$ ein Element aus dem (offensichtlichen) Definitionsbereich von $f$ ist.

Das Bild einer rationalen Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$ ist $\operatorname{Im} f = \overline{f(U)}$, wobei $U$ ein Definitionsbereich ist. Es gilt dann $\dim \operatorname{Im} f = \dim f(U)$.

Bilder und Urbilder beliebiger Teilmengen werden mit Hilfe des Graphen

$$\operatorname{Graph} f = \overline{\{(x, f(x)) \in U \times Y\}} \subseteq X \times Y \qquad U \text{ Definitionsbereich}$$

und den kanonischen Projektionen

$$\pi_X : \operatorname{Graph} f \longrightarrow X \qquad \text{und} \qquad \pi_Y : \operatorname{Graph} f \longrightarrow Y$$

definiert.

Für $Z \subseteq X$ ist $f(Z) := \pi_Y \pi_X^{-1}(Z)$.
Für $Z \subseteq Y$ ist $f^{-1}(Z) := \pi_X \pi_Y^{-1}(Z)$.

**Satz B.1**
*Falls $f : X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung und $X$ irreduzibel ist, dann ist* $\operatorname{Im} f$ *irreduzibel.*

*Beweis.* Wenn $U \subseteq X$ ein Definitionsbereich von $f$ ist, ist mit $X = \overline{U}$ auch $U$ irreduzibel. Also ist $f(U)$ als Bild einer irreduziblen Menge unter einer regulären Abbildung irreduzibel, und damit auch $\operatorname{Im} f = \overline{f(U)}$. □

**Satz B.2** *Für eine rationale Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$, wobei $X$ irreduzibel ist, ist die allgemeine Faser irreduzibel, falls die Faserdimension größer oder gleich* 1 *ist.*

*Beweis.* Das folgt aus dem Satz von Bertini für reguläre Abbildungen angewandt auf die reguläre Abbildung

$$\pi_Y : \operatorname{Graph} f \longrightarrow Y.$$

Denn für allgemeines $y \in Y$ besagt dieser, daß $\pi_Y^{-1}(y) = f^{-1}(y) \times y \cong f^{-1}(y)$ irreduzibel ist, falls $\dim \pi_Y^{-1}(y) \geq 1$ ist. □

# Literaturverzeichnis


[B] Gerrit Bol. *Projektive Differentialgeometrie, 1.Teil.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1950).

[BG] J. W. Bruce & P. J. Giblin. *Curves and singularities.* Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[BW] Thomas Becker & Volker Weispfenning. *Gröbner Bases.* Springer, New York (1993).

[C] Arthur Cayley. *On Certain Developable Surfaces.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume VI (1864), pp. 108-126.

[CLO] David Cox, John Little & Donal O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Springer, New York (1992).

[E] Dirk Ehrhard. *Abwickelbare Regelflächen in der reellen und komplexen Differentialgeometrie.* Diplomarbeit, Düsseldorf (1989).

[FL] W. Fulton & R. Lazarsfeld. *Connectivity and its applications in algebraic geometry.* Algebraic Geometry (Chicago, 1980), Lecture Notes in Mathematics, Volume 862, pp. 26-92. Springer, New York (1981).

[FW] Gerd Fischer & H. H. Wu. *Developable Complex Analytic Submanifolds.* International Journal of Mathematics, Volume 6, No. 2 (1995), pp. 229-272.

[G] Mark L. Green. *The Moving Frame, Differential Invariants and Rigidity Theorems for Curves in Homogeneous Space.* Duke Mathematical Journal, Volume 45, No. 4 (Dec. 1978), pp. 735-779.

[GH1] Phillip Griffiths & Joseph Harris. *Algebraic Geometry and Local Differential Geometry.* Annales scientifiques de L' Écoles Normale Superérieure, $4^e$ série, tome 12 (1979), N° 3, pp. 355-432.

[GH2] Phillip Griffiths & Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley–Interscience, New York (1978).

[GPS] G.-M. Greuel, G. Pfister & H. Schönemann. *SINGULAR - A Computer Algebra System.*

[H] Joe Harris. *Algebraic Geometry.* Springer, New York (1992).

[Ha] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer, New York (1977).

[K] Steven L. Kleiman. *Tangency and Duality.* Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings, Volume 6 (1986), pp. 163-225. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[L] Serge Lang. *Algebra.* Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (1993).

[M] *Maple V.* Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

[P] Jens Piontkowski. *Eine Normalform für Kurven in den Grassmannvarietäten.* Diplomarbeit, Düsseldorf (1993).

[S] Michael Schlenger. *Beispiele abwickelbarer Regelflächen von höherem Rang.* Diplomarbeit, Düsseldorf (1994).

[SW] D. H. Sattinger & O. L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer, New York (1993).

[W] H. H. Wu. *Complete Developable Submanifolds in Real and Complex Euclidian Space.* In Vorbereitung.

[Z1] F. L. Zak. *Tangents and Secants of Algebraic Varieties.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 127. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1993).

[Z2] F. L. Zak. *Structure of Gauss Maps.* Functional Analysis and its Applications, Vol. 21 (1987). Plenum Publishing Cooperation.

[Z3] F. L. Zak. *Projections of Algebraic Varieties.* Matematiceskii USSR Sbornik, Vol. 44 (1983), No. 4, pp. 535-544. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.