Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, in dem $1 + 1 = 0$ gilt, und $P \subset R$ die Teilmenge aller $a \in R$ mit $a^4 = 0$, sowie $Q \subset R$ die Teilmenge aller $b \in R$ mit $b^2 = 0$. Wir definieren auf $G = P \times Q$ eine Verknüpfung durch

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', aa'^2 + b + b').$$

Rechnen Sie nach, dass die Gruppenaxiome erfüllt sind und zeigen Sie, dass die Teilmenge $H = P \times P$ eine normale Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Untergruppe, welche von den beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

(i) Zeigen Sie, dass die Gruppe G von Ordnung $\mathrm{ord}(G) = 8$ ist, indem Sie die Matrizenprodukte der Form $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}B^{n_4}\ldots$ bestimmen.

(ii) Berechnen Sie ABA^{-1} und BAB^{-1}, und folgern Sie aus Ihrem Ergebnis, dass jede Untergruppe $H \subset G$ normal ist.

Bemerkung: Die Gruppe G wird auch als *Quaternionengruppe* bezeichnet.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, und $H \subset G$ eine Untergruppe. Die Teilmengen

$$\begin{aligned} C_G(H) &= \left\{ g \in G \mid ghg^{-1} = h \text{ für alle } h \in H \right\}, \\ N_G(H) &= \left\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \right\}. \end{aligned}$$

von G bezeichnet man als *Zentralisator* und *Normalisator* von H. Ist keine Verwechslung zu befürchten, schreibt man auch $C(H)$ und $N(H)$ dafür. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die beiden Teilmengen $C(H), N(H) \subset G$ sind Untergruppen.

(ii) Es gilt $C(H) \subset N(H)$, und die Untergruppe $C(H) \subset N(H)$ ist normal.

(iii) Ist $H \subset G$ normal, so gilt dies auch für $C(H) \subset G$.

(iv) Es gilt $H \subset N(H)$ und die Untergruppe $H \subset N(H)$ ist normal, und $N(H) \subset G$ ist die größte Untergruppe mit dieser Eigenschaft.

Anmerkung: Die Quotientengruppe $W_G(H) = N_G(H)/H$ bezeichnet man als die *Weyl-Gruppe* von $H \subset G$.

Aufgabe 4. Sei G eine Menge, versehen mit einer assoziativen Verknüpfung $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$. Angenommen, die folgenden beiden Bedingungen sind erfüllt:

(i) Es gibt ein $e \in G$ mit $ea = a$ für alle $a \in G$.

(ii) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a'a = e$.

Beweisen Sie, daß G dann bereits eine Gruppe sein muß.

Abgabe: Bis Donnerstag, 13.04. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 2

Aufgabe 1. (i) Ist die Gruppe $C_3 \times C_5$ zyklisch? Wie steht es mit der Gruppe $C_2 \times C_2$?

(ii) Sei G eine zyklische Gruppe. Beweisen Sie, dass dann auch jede Quotientengruppe G/H und jede Untergruppe $H \subset G$ zyklisch ist.

(iii) Ist die Gruppe $G = \mathrm{Aut}(C_8)$ zyklisch?

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe.

(i) Verifizieren Sie, dass die Kommutatoruntergruppe $[G, G] \subset G$ normal ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Quotientengruppe $G_{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ abelsch ist.

(iii) Sie $f : G \to A$ ein Homomorphismus in einer abelschen Gruppe A. Beweisen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $f_{\mathrm{ab}} : G_{\mathrm{ab}} \to A$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & A \\ G_{\mathrm{ab}} \arrow[ur, "f_{\mathrm{ab}}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Bemerkung: Man bezeichnet die Gruppe G_{ab} als die *Abelianisierung* von G.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $A \subset G$ eine normale Untergruppe und $B \subset G$ eine Untergruppe. Angenommen, jedes Element $g \in G$ läßt sich in eindeutiger Weise als Produkt $g = ab$ mit $a \in A$ und $b \in B$ schreiben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der induzierte Homomorphismus $B \to G/A$, $b \mapsto bA$ ist bijektiv.

(ii) Die Vorschrift $b \mapsto (a \mapsto bab^{-1})$ liefert einen wohldefinierten Homomorphismus $f : B \to \mathrm{Aut}(A)$.

(iii) Die auf dem semidirekten Produkt definierte Abbildung $h : A \rtimes_f B \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ ist ein bijektiver Homomorphismus.

Aufgabe 4. Sei G eine dihedrale Gruppe von Ordnung $\mathrm{ord}(G) = 2n$ mit $n \geq 3$. Beweisen Sie die folgenden drei Aussagen:

(i) Es gibt genau eine zyklische Untergruppe $N \subset G$ vom Index $[G : N] = 2$.

(ii) Es gibt genau n nichtzentrale Elemente $x \in G$ von Ordnung zwei, also $x \notin C(G)$ und $\mathrm{ord}(x) = 2$.

(iii) Sei $x \in G$ so ein nichtzentrales Element von Ordnung zwei, $H = \{e, x\}$ die davon erzeugte Untergruppe, und $X = G/H$ die zugehörige Quotientenmenge. Dann ist der zur Translationswirkung $G \times X \to X$ gehörige Homomorphismus $G \to S_X$, $g \mapsto (yH \mapsto gyH)$ injektiv.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 20.4. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Sprechstunden: Prof. Dr. Stefan Schröer montags von 11–12h ct.
Dr. Christian Liedtke donnerstags von 13–14h ct.
Ilya Gendler und Saša Novaković dienstags von 13–14h ct im Korrektorenzimmer 25.13.U1.31.

Klausur: Donnerstag, 13.7.2006, von 9:00–11:00 Uhr im Hörsaal 5E.
Nachklausur: Montag, 16.10.2006, von 11:00–13:00 Uhr im Hörsaal 5H.
Erlaubte Hilfsmittel: 2 Blatt Papier mit handschriftlichen Notizen.

Zulassung zu Klausur/Nachklausur: Sie müssen eine Übungsaufgabe in den Übungen vorrechnen und mindestens 40% = 96 Punkte erreichen. Wir ermutigen Sie, die Übungsaufgaben in Gruppen zu bearbeiten; die Lösungen müssen jedoch einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, und $p_1, \ldots, p_r$ die verschiedenen Primteiler von $n = \operatorname{ord}(G)$. Sei $P_i \subset G$ eine Sylow-p_i-Untergruppe. Verifizieren Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Es gilt $P_i \cap P_j = \{e\}$ für alle $i \neq j$.

(ii) Die Gruppe G wird von der Vereinigungsmenge $P_1 \cup \ldots \cup P_r$ erzeugt.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe, $H \subset G$ eine normale Untergruppe, $f : G \to G/H$ die kanonische Projektion und $P \subset G$ eine Sylow-p-Untergruppe. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Der Durchschnitt $P \cap H \subset H$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von H.

(ii) Das Bild $f(P) \subset G/H$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von G/H.

Aufgabe 3. Sei G eine endliche Gruppe, $p > 0$ eine Primzahl, $X = \operatorname{Syl}_p(G)$ die Menge aller Sylow-p-Untergruppen, und

$$f : G \longrightarrow S_X, \quad g \longmapsto (P \longmapsto gPg^{-1})$$

der kanonische Homomorphismus. Wir betrachten nun $H = \operatorname{kern}(f)$. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Es gilt $H = \bigcap_{P \in X} N_G(P)$.

(ii) Die Unterpruppe $Q = \bigcap_{P \in X} P$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von H, und das ist die einzige Sylow-p-Untergruppe in H.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe von Ordnung $n = p^2q^2$, wobei $p < q$ zwei Primzahlen sind. Angenommen, es gilt $n \neq 36$. Beweisen Sie, dass zumindest eine Sylow-Untergruppe von G normal ist, und dass G folglich isomorph zu einem semidirekten Produkt von Sylow-Untergruppen ist.

Anmerkung: Die Aussage stimmt auch für $n = 36$. Wer findet einen Beweis dafür?

Abgabe: Bis Donnerstag, 27.4. um 9:10 h in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Seien $m, n \geq 1$ zwei ganze Zahlen, $k = \mathrm{kgV}(m, n)$ ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, und $g = \mathrm{ggT}(m, n)$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Zeigen Sie

$$C_m \times C_n \simeq C_k \times C_g.$$

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl, und $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen $A = (a_{ij})$, deren Diagonaleinträge konstant eins sind: $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 1$.

(i) Verifizieren Sie, daß $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ eine Sylow-p-Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ ist.

(ii) Beweisen Sie, daß die Gruppe H auflösbar ist.

Aufgabe 3. Für $n \geq 1$ sei $\Psi(n)$ die Anzahl der Isomorphieklassen der endlichen abelschen Gruppen von Ordnung $\mathrm{ord}(G) = n$. Es gilt zum Beispiel $\Psi(p) = 1$ für jede Primzahl p.

(i) Berechnen Sie $\Psi(32)$.

(ii) Berechnen Sie $\Psi(1500)$.

(iii) Zeigen Sie, daß die zahlentheoretische Funktion Ψ *multiplikativ* ist, also daß $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$ gilt, wenn a, b relativ prim zueinander sind.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, daß die alternierende Gruppe $A_4 = D^1(S_4)$ isomorph zu einem semidirektem Produkt der Form $\mathbb{F}_2^{\oplus 2} \rtimes_f C_3$ mit einem Homomorphismus $f : C_3 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ ist.

(ii) Sei $x \in C_3$ einer der beiden Erzeuger, und $A = f(x)$ sein Bild in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$. Zeigen Sie, daß die 2×2-Matrix A Spur und Determinante $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 1$ hat und nicht trigonalisierbar ist.

(iii) Bestimmen Sie alle Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$, deren Spur und Determinante gleich eins ist.

(iv) Beweisen Sie, daß $D^1(A_4) = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 04.05. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal* von $\mathfrak{a}$ wird definiert als die Teilmenge $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset R$ aller $x \in R$ mit der Eigenschaft $x^n \in \mathfrak{a}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Teilmenge $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset R$ ist ein Ideal.

(ii) Es gilt $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(iii) Weiterhin haben wir $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(iv) Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so gilt $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Zeigen Sie, daß die folgenden Teilmengen ebenfalls Ideale sind:

(i) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

(ii) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}, n \geq 0\}$.

(iii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$.

(iv) $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{x \in R \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}$.

Verifizieren Sie weiterhin die Inklusionen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ für eine ganze Zahl $n \geq 0$ gilt. Wir definieren das *Nilradikal* des Ringes R als die Teilmenge $\mathfrak{a} = \{a \in R \mid a \text{ nilpotent}\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Nilradikal $\mathfrak{a} \subset R$ ist ein Ideal.

(ii) Im Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ gibt es außer dem Nullelement keine nilpotenten Elemente.

(iii) Es gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.

(iv) Ist $a \in R$ nilpotent, so ist $1 + a \in R$ invertierbar.

(v) Sei nun $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ein Polynom in der Unbestimmten X mit Koeffizienten $a_i \in R$. Zeigen Sie, daß $f \in R[X]$ genau dann nilpotent ist, wenn alle Koeffizienten $a_i \in R$ nilpotent sind.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, und

$$\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

der Ring der stetigen Funktionen. Die Ringstruktur wird dabei punktweise durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

erklärt. Ist $y \in X$ ein Punkt, so definieren wir die Teilmenge $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{C}(X)$ als die Menge aller stetigen Funktionen mit $f(y) = 0$.

(i) Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{C}(X)$ ein maximales Ideal ist.

(ii) Zeigen Sie für den topologischen Raum $X = \mathbb{R}$, daß es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}(X)$ geben muß, das nicht von der Form $\mathfrak{m}_x$, $x \in X$ ist.

Tip: Benutzen Sie das Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{C}(X)$ aller Funktionen mit kompaktem Träger.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 11.5. um 9:10h in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. (i) Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, daß $S^{-1}R$ der Nullring ist genau dann, wenn $0 \in S$.

(ii) Was ist die Lokalisierung des Ringes $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bezüglich der multiplikativen Teilmenge $S = \{1, 2, 4\}$?

(iii) Sei $A = R \times R'$ das Produkt von zwei Ringen. Zeigen Sie, daß R isomorph zu einer Lokalisierung von A ist.

(iv) Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge, und $T \subset R$ die Menge aller $t \in R$ mit der Eigenschaft $t^n \in S$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $T \subset R$ multiplikativ ist, und daß der kanonische Homomorphismus $f : S^{-1}R \to T^{-1}R$, $a/s \mapsto a/s$ bijektiv ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und U, V, X, Y, Z Unbestimmte. Wir betrachten den Unterring $A = K[U^2, UV, V^2] \subset K[U, V]$ sowie den Restklassenring $R = K[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$.

(i) Konstruieren Sie mittels der universellen Eigenschaft des Polynomringes einen bijektiven Homomorphismus $R \to A$.

(ii) Beweisen Sie, daß der Ring A nicht faktoriell sind.

Aufgabe 3. Sei R ein integrer Ring.

(i) Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge, und $p \in R$ ein Primelement. Zeigen Sie, daß der Bruch $p/1 \in S^{-1}R$ entweder invertierbar oder prim ist.

(ii) Wir betrachten nun die Teilmenge

$$S = \{a \in R \mid a \text{ ist nicht Produkt von Primelementen}\} \cup \{1\}\,.$$

Beweisen Sie, daß $S \subset R$ multiplikativ ist, und daß die Lokalisierung $S^{-1}R$ faktoriell ist.

Aufgabe 4. Sei R ein euklidischer Ring, und $\varphi : R \to \mathbb{N}$ eine euklidische Funktion. Für eine formale Laurent-Reihe $f = \sum_{i \geq n} \lambda_i X^i$, $\lambda_i \in R$, $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\delta(f) = \begin{cases} \varphi(\lambda_n) & \text{wenn } \lambda_n \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } f = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß der Ring der formalen Laurent-Reihen $A = R[[X]][X^{-1}]$ euklidisch bezüglich der Funktion $\delta : A \to \mathbb{N}$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 18.5. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 7

Aufgabe 1. (i) Geben Sie alle normierten irreduzible Polynome $f \in \mathbb{F}_2[X]$ vom Grad $\deg(f) \leqslant 4$ an
(ii) Bestimmen Sie alle normierten irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die komplexen Zahlen $i = e^{2\pi i/4}$ und $\rho = e^{2\pi i/3}$, sowie die davon erzeugten Unterringe $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}[\rho] \subset \mathbb{C}$. Beweisen Sie, daß diese beiden Ringe $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[\rho]$ euklidisch bezüglich der Normfunktion $N(m + ni) = m^2 + n^2$ sind.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen sie die folgenden Aussagen:

(i) Jeder Unterring eines Hauptidealringes ist ein Hauptidealring.

(ii) Jeder Restklassenring eines Hauptidealringes ist ein Hauptidealring.

(iii) Jede Lokalisierung eines Hauptidealringes ist ein Hauptidealring.

(iv) Der Polynomring in einer Unbestimmten über einem Hauptidealring ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 4. Sei R ein Hauptidealring und X eine Unbestimmte. Wir betrachten die Teilmenge $S \subset R[X]$ aller primitiven Polynome.

(i) Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $S \subset R[X]$ multiplikativ ist.

(ii) Beweisen Sie, daß die Lokalisierung $A = S^{-1}R[X]$ ein Hauptidealring ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 1.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 8

Aufgabe 1. (i) Wir betrachten das Polynom $f = X^4 + 5X^2 + 2$. Verifizieren Sie, daß $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, etwa mit dem Reduktionskriterium für die Primzahl $p = 3$.

(ii) Das Polynom f liefert also einen Körper $L = \mathbb{Q}[X]/(f)$. Sei $\lambda \in L$ die Restklasse der Unbestimmten $X \in \mathbb{Q}[X]$. Dann bilden die Potenzen $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \in L$ eine Vektorraumbasis über $\mathbb{Q}$. Stellen Sie das Produkt

$$(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3) \cdot (\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + 1) \in L$$

als Linearkombination der obigen Vektorraumbasis da.

Anmerkung: Endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ werden auch als *Zahlkörper* bezeichnet. Zahlkörper sind Gegenstand der *Algebraischen Zahlentheorie* und spielen in der *Arithmetischen Geometrie* eine wichtige Rolle.

Aufgabe 2. (i) Sei R ein euklidischer Ring und $a, b \in R$. Zeigen Sie, daß mit dem euklidischen Algorithmus ein größter gemeinsamer Teiler von a, b in der Form $g = ra + sb$ berechnet werden kann.

(ii) Sei $f = X^4 - 2X^2 + 2$. Zeigen Sie, daß $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(iii) Sei $h = X^3 + 3X + 1$. Verifizieren Sie, daß das Einselement $1 \in \mathbb{Q}[X]$ ein größter gemeinsamer Teiler von f, h ist.

(iv) Wir betrachten den Zahlkörper $L = \mathbb{Q}[X]/(f)$. Sei $\lambda \in L$ die Restklasse der Unbestimmten $X \in \mathbb{Q}[X]$. Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $h(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda + 1 \in L$, indem Sie mit dem Euklidischen Algorithmus eine Darstellung $1 = rf + sh$ bestimmen.

Aufgabe 3. Sei $K \subsetneq L$ eine nichttriviale Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß die K-Algebra $A = L \otimes_K L$ kein Körper ist.

Tip: Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $A \to L$, $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda\mu$.

Aufgabe 4. (i) Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, und $\lambda, \mu \in L$ zwei algebraische Elemente. Wir bilden die K-Algebra $A = K(\lambda) \otimes K(\mu)$ und betrachten die K-lineare Abbildung

$$h : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto (\lambda \otimes 1 + 1 \otimes \mu)x.$$

Zeigen Sie mit dem Satz von Cayley–Hamilton, daß das Minimalpolynom $f \in K[X]$ von der Summe $\lambda + \mu \in L$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_h \in K[X]$ von $h \in \operatorname{End}_K(A)$ ist.

Wir betrachten nun als Beispiel die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ und die algebraischen Elemente $\lambda = \sqrt{2}, \mu = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

(ii) Geben Sie die Minimalpolynome von $\sqrt{2}, e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$ an, und berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_h \in \mathbb{Q}[X]$ von $h \in \operatorname{End}_K(A)$.

(iii) Bestimmen Sie daraus das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 8.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung, der Grad ist also $[L : K] = 2$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Wenn K von Charakteristik $p \neq 2$ ist, so ist $K \subset L$ separabel, und von der Form $L \simeq K[X]/(X^2 + b)$ für ein $b \in K$.

(ii) Wenn K von Charakteristik $p = 2$ ist, so ist $K \subset L$ von der Form $L \simeq K[X]/(X^2 + aX + b)$ für gewisse $a, b \in K$. Die Körpererweiterung $K \subset L$ ist separabel genau dann, wenn $a \neq 0$.

(iii) Für den endlichen Körper $K = \mathbb{F}_2$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine quadratische Körpererweiterung. Man bezeichnet diesen Körper mit $L = \mathbb{F}_4$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die reellen Zahlen $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{x}$ und definieren die Körper $E = \mathbb{Q}(x)$ und $L = E(y)$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die beiden Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset E$ und $E \subset L$ normal sind, aber daß die Verkettung $\mathbb{Q} \subset L$ nicht normal ist.

Aufgabe 3. (i) Sei $K \subset L$ ein eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß jeder Homomorphismus von K-Algebren $f : L \to L$ bijektiv ist.

(ii) Gilt die entsprechende Aussage auch für algebraische Körpererweiterungen $K \subset L$?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, und $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung, und $K \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluß. Ein Element $\lambda \in L$ heißt *rein inseparabel* über K, wenn das Minimalpolynom $f \in K[X]$ über Ω nur eine Wurzel (mit entsprechender Multiplizität) besitzt.

(i) Zeigen Sie, daß für rein inseparable $\lambda \in L$ das Minimalpolynom von der Form $f = X^{p^e} - a$ für ein $a \in K$ und ein natürliche Zahl $e \geq 0$ ist.

(ii) Beweisen Sie, daß jedes $\lambda \in L$ rein inseparabel über dem separablen Abschluß $L_s = \{\lambda \in L \mid \lambda \text{ ist separabel über } K\}$ ist.

Abgabe: Bis Freitag, 16.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen. Blatt 10 wird dann in der Übungsgruppe ausgeteilt.

Antrittsvorlesung: Am Dienstag, den 13.6. um 16 Uhr ct. findet im Hörsaal 5H meine Antrittsvorlesung zum Thema

Konfigurationsräume von Punkten auf abelschen Varietäten

statt. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und $f \in K[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Wir wählen einen algebraischen Abschluß $K \subset \Omega$ und faktorisieren $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \omega_i)$ mit den Wurzeln $\omega_i \in \Omega$. Man bezeichnet

$$\operatorname{dis}(f) = \prod_{i<j}(\omega_i - \omega_j)^2 \in \Omega$$

als die *Diskriminante* von f.

(i) Verifizieren Sie, daß $\operatorname{dis}(f) \neq 0$ gilt genau dann, wenn f separabel ist.

(ii) Beweisen Sie, daß $\operatorname{dis}(f) \in K$ gilt. Unterscheiden Sie die Fälle, daß f nichtseparabel bzw. separabel ist, und benutzen Sie den separablen Abschluß von K in Ω.

(iii) Verifizieren Sie die beiden Formeln

$$\operatorname{dis}(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q,$$
$$\operatorname{dis}(X^3 + q) = -27q^2.$$

Benutzen Sie für die zweite Formel am besten dritte Einheitswurzeln.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein normiertes separables Polynom vom Grad $n = \deg(f)$, und $K \subset L$ sein Zerfällungskörper. Wir faktorisieren $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ mit den Wurzeln $\lambda_i \in L$.

(i) Sei $g \in \operatorname{Gal}(L/K)$. Zeigen Sie, daß $g(\lambda_i) = \lambda_{\sigma_g(i)}$ für eine Permutation $\sigma_g \in S_n$ gilt, und daß die Abbildung $\operatorname{Gal}(L/K) \to S_n$, $g \mapsto \sigma_g$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(ii) Beweisen Sie, daß dieser Homomorphismus $\operatorname{Gal}(L/K) \to S_n$ injektiv ist.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Wir bezeichnen eine Untergruppe $H \subset G$ als *abgeschlossen*, wenn es einen Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt mit $H = \mathrm{Gal}(L/E)$.

(i) Verifizieren Sie, daß die beiden Untergruppen $1, G \subset G$ abgeschlossen sind.

(ii) Sei $H_\alpha \subset G$, $\alpha \in I$ eine Familie von abgeschlossenen Untergruppen. Zeigen Sie, daß deren Durchschnitt $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha \subset G$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. (i) Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft $\sigma^2 = 1$ für alle $\sigma \in G$. Zeigen Sie, daß G abelsch sein muß, und G in kanonischer Weise ein Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ist.

(ii) Sei nun $\mathbb{Q} \subset L$ ein Zerfällungskörper der Familie aller Polynome der Form $X^2 - a$, $a \in \mathbb{Q}$. Verifizieren Sie, daß $\mathbb{Q} \subset L$ galoisch ist, und daß die Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ die Eigenschaft $\sigma^2 = 1$ für alle $\sigma \in G$ besitzt.

(iii) Zeigen Sie, daß die Anzahl der Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset E \subset L$ vom Grad $[E : \mathbb{Q}] = 2$ abzählbar unendlich ist.

(iv) Beweisen Sie, daß die Galois-Gruppe G überabzählbar ist.

(v) Folgern Sie, daß die Anzahl der Untergruppen $H \subset G$ der Galois-Gruppe vom Index $[G : H] = 2$ ebenfalls überabzählbar sein muß.

Bemerkung: Dies belegt, daß für unendliche Galois-Erweiterungen die Galois-Korrespondenz $E \mapsto \mathrm{Gal}(L/E)$ und $H \mapsto L^H$ aus Kardinalitätsgründen nicht bijektiv sein kann.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 22.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K) = S_3$. Wieviele Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt es, und was für Galois-Gruppen $\mathrm{Gal}(L/E)$ treten dabei auf?

Aufgabe 2. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung, dessen Grad die Form $[L : K] = p^2$ für eine Primzahl $p > 0$ hat. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist isomorph zu C_{p^2} oder $C_p \times C_p$.

(ii) Ist $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq C_{p^2}$, so gibt es genau drei Zwischenkörper $K \subset E \subset L$.

(iii) Ist dagegen $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq C_p \times C_p$, so gibt es genau $p+3$ Zwischenkörper $K \subset E \subset L$.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine endliche abelsche Erweiterung. Mit anderen Worten: $K \subset L$ ist galoisch, und $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist eine endliche abelsche Gruppe.

(i) Verifizieren Sie, daß für jeden Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ die Körpererweiterung $K \subset E$ galoisch ist.

(ii) Sie d ein Teiler des Grades $[L : K]$. Zeigen Sie, daß es einen Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ vom Grad $[E : K] = d$ geben muß.

(iii) Bleibt die Aussage in (ii) für beliebige endlich Galois-Erweiterungen richtig?

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung.

(i) Zeigen Sie, daß es eine Kette von Zwischenkörpern

$$K = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = L$$

gibt so, daß $E_i \subset E_{i+1}$ galoisch ist, und daß die Gruppe $\mathrm{Gal}(E_{i+1}/E_i)$ einfach ist.

(ii) Wir nehmen nun an, daß die Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ bereits einfach ist. Sei $\lambda \in L$, $\lambda \notin K$, und $f \in K[X]$ sein Minimalpolynom. Beweisen Sie, daß $K \subset L$ ein Zerfällungskörper von f ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 29.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 12

Aufgabe 1. Stellen Sie das symmetrische Polynom

$$f = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$$

als Polynom $f = Q(e_1, e_2, e_3)$ in den elementar-symmetrischen Polynomen

$$e_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad e_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3, \quad e_3 = X_1X_2X_3$$

dar.

Aufgabe 2. (i) Sei $K = \mathbb{Q}$. Geben Sie zwei Kubiken $f, g \in K[X]$ an so, daß der Zerfällungskörper von f Grad drei hat, und der Zerfällungskörper von g Grad sechs hat.

(ii) Machen Sie das gleiche über dem Körper $K = \mathbb{F}_2(T)$, wobei T eine Unbestimmte ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein separables Polynom, und $K \subset L$ ein Zerfällungskörper dazu. Wir betrachten die Menge der Wurzeln $R = \{\lambda \in L \mid f(\lambda) = 0\}$ und die Wirkung der Galois-Gruppe

$$\mathrm{Gal}(L/K) \times R \longrightarrow R, \quad (\sigma, \lambda) \longmapsto \sigma(\lambda).$$

Beweisen Sie, daß diese Gruppenwirkung transitiv ist genau dann, wenn das Polynom $f \in K[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung. Angenommen, die Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ist isomorph zu einem semidirekten Produkt $G = H \rtimes_\phi K$ von zwei Untergruppen $H, K \subset G$. Seien $E = L^H$ und $F = L^K$ die entsprechenden Fixkörper.

(i) Zeigen Sie mittels der Galois-Korrespondenz, daß $L = K(E \cup F)$ gilt.

(ii) Folgern Sie daraus, daß die kanonische Abbildung

$$E \otimes_K F \longrightarrow L, \quad \lambda \otimes \mu \longmapsto \lambda\mu$$

bijektiv sein muss.

Abgabe: Bis Donnerstag, 6.7. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Klausur: Donnerstag, der 13.7. von 9:00-11:00 Uhr st. im Hörsaal 5E
Die Zulassung wird durch Aushang bekanntgegeben.
Erlaubte Hilfsmittel: 2 Blatt (= 4 Seiten) *handschriftliche* Notizen. Bitte bringen Sie Papier und Kugelschreiber mit.

Seminarvorbesprechung:
Im WS 06/07 findet ein Seminar über *Kommutative Algebra* statt. Die erste Vorbesprechung mit Vortragsverteilung ist am Donnerstag, den 13.7. gegen 15:45 Uhr im Seminarraum 25.22.01.81, im Anschluß an das laufende Seminar.