

## Nachklausur Einführung in die Algebra

**Bearbeitungszeit:** 120 Minuten

<b>Name, Vorname:</b>
<b>Matrikelnummer:</b>
<b>Unterschrift:</b>
<b>Studienfach:</b>
<b>Studienziel:</b>
<b>Semesterzahl:</b>

Legen Sie Ihren Studenten- und Personalausweis sichtbar am Arbeitsplatz aus.  
Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen. Begründen Sie Ihre Antworten.  
Erlaubte Hilfsmittel: 2 Blatt handschriftliche Notizen.  
Bei jeder Aufgabe können Sie 5 Punkte erreichen.

1	2	3	4	5	$\Sigma$

**Aufgabe 1.** (i) Wieviele abelsche Gruppen der Ordnung  $\text{ord}(G) = 100$  gibt es bis auf Isomorphie, und welche sind es?

(ii) Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $\text{ord}(G) = 156$ . Zeigen Sie, daß es eine normale Untergruppe  $H \subset G$  mit  $H \neq \{e\}$  und  $H \neq G$  gibt.

**Aufgabe 2.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, und  $f : G \rightarrow H$  ein surjektiver Homomorphismus von Gruppen. Sei  $p > 0$  eine Primzahl, und  $P \subset G$  eine Sylow- $p$ -Untergruppe. Zeigen Sie, daß das Bild  $f(P) \subset H$  ebenfalls eine Sylow- $p$ -Untergruppe ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $K \subset L$  eine algebraische Körpererweiterung, und  $f : L \rightarrow L$  ein Homomorphismus von  $K$ -Algebren. Zeigen Sie, daß  $f$  bijektiv ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $K \subset L$  eine Galois-Erweiterung mit  $\text{Gal}(L/K) \simeq C_{13} \times C_{13}$ . Wieviele Zwischenkörper  $K \subset E \subset L$  gibt es?

**Aufgabe 5.** Sei  $R$  ein Ring, und  $S \subset R$  eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, daß die Lokalisierung  $S^{-1}R$  der Nullring ist genau dann, wenn  $0 \in S$  gilt.