

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Blatt 9

**Aufgabe 1.** Wir betrachten die symmetrische Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}).$$

Für welche Skalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist die zugehörige symmetrische Bilinearform  $\Phi(x, y) = x^t G y$  auf  $\mathbb{R}^2$  ein Skalarprodukt?

**Aufgabe 2.** Sei  $V \subset \text{Mat}(2, \mathbb{C})$  der reelle Untervektorraum aller spurlosen Hermiteschen Matrizen, und

$$A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \in \text{SU}(2), \quad z\bar{z} + w\bar{w} = 1.$$

Bestimmen Sie die Matrix  $B \in \text{SO}(3)$  des Automorphismus

$$\tau_A : V \longrightarrow V, \quad H \longmapsto AH\bar{A}^t$$

bezüglich der Basis

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3.** Sei  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform, und  $x_1, \dots, x_n \in V$  eine Basis mit der Eigenschaft, daß die Gram-Matrizen

$$G_k = (\Phi(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \in \text{Mat}(k, \mathbb{R}), \quad 1 \leq k \leq n$$

invertierbar sind. Beweisen Sie, daß die Invariante  $n_{-1} \geq 0$  von  $\Phi$  mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der reellen Zahlenfolge

$$1, \det(G_1), \det(G_2), \dots, \det(G_n)$$

übereinstimmt.

**Aufgabe 4.** Sei  $U \subset \text{Mat}(2, \mathbb{C})$  der reelle Untervektorraum aller Hermiteschen Matrizen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (H, H') \longmapsto \frac{1}{2}(\det(H) + \det(H') - \det(H + H')).$$

- (i) Verifizieren, daß  $\Phi$  eine symmetrische Bilinearform ist.
- (ii) Wählen Sie eine Basis  $H_1, \dots, H_4 \in U$  und berechnen Sie die Gram-Matrix  $G \in \text{Mat}(4, \mathbb{R})$  von  $\Phi$  dazu.
- (iii) Welche Invarianten  $n_1, n_{-1}, n_0$  hat  $\Phi$ ? (Sie dürfen Aufgabe 3 benutzen.)

**Abgabe:** Bis Mittwoch den 24.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

**Terminänderung:** Die Nachklausur wird vorverlegt und findet am Freitag, dem 25.09.2009 von 9:00–11:00 Uhr im Hörsaal 5C statt.