Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 1

Aufgabe 1. Berechnen Sie die ersten fünf Ziffern $a_0, \ldots, a_4$ der ganzen p-adischen Zahl

$$\frac{1+p+p^2}{p-1} = \sum_{i\geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p,$$

für die Primzahlen $p = 2, 3, 5$.

Aufgabe 2. Sei $a = \sum_{i\geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ eine ganze p-adische Zahl. Zeigen Sie, daß a genau dann in der Teilmenge $\{-1, -2, -3, \ldots\} \subset \mathbb{Z}_p$ enthalten ist, wenn für fast alle Koeffizienten $a_i = p - 1$ gilt.

Aufgabe 3. Verifizieren Sie, daß die Einheitengruppe $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p \smallsetminus \{0\}$ des Körpers der p-adischen Zahlen isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^\times$ ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ unendlichen Grad hat, also $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_p) = \infty$.

Abgabe: Bis Montag den 26.10. um 11:00 Uhr in den Zettelkasten.

Leistungspunkte: Bei Bestehen der Prüfung zur Lehrverantaltung werden 9 Leistungspunkte vergeben. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen Sie als Prüfungsvorleistung regelmäßig am Übungsbetrieb teilnehmen und 20% der möglichen Punkte auf den Übungszetteln erreichen. Die Prüfung wird als mündliche Prüfung zum Ende der Vorlesungszeit oder zum Ende des Semesters durchgeführt.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 2

Aufgabe 1. Für welche Primzahlen $3 \leqslant p \leqslant 17$ existieren Quadratwurzeln $\pm\sqrt{2}$ als Elemente im Körper $\mathbb{Q}_p$?

Aufgabe 2. Berechnen Sie jeweils die ersten vier Ziffern a_0, a_1, a_2, a_3 der Quadratwurzel

$$\pm\sqrt{2} = \sum_{i\geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$$

für die in Aufgabe 1 gefunden Primzahlen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß jede p-adische Zahl die Summe einer ganzen p-adischen Zahl und einer rationalen Zahl ist, deren Nenner eine p-Potenz ist:

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}[1/p].$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ aller p-adischen Zahlen modulo den ganzen p-adischen Zahlen, wobei die Verknüpfung durch die Addition geliefert wird. Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ eine Vereinigung von endlichen Gruppen ist, deren Ordnungen Potenzen von p sind. Ist die Gruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ selber endlich?

Abgabe: Bis Montag den 2.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 3

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Legendre-Symbole

$$\left(\frac{113}{59}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{17}{227}\right).$$

Aufgabe 2. Sei $p \neq 2$ eine ungerade Primzahl. Verifizieren Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Der Körper $\mathbb{Q}_p$ enthält $\sqrt{-1}$ genau dann, wenn $p \equiv 1$ modulo 4.

(ii) Der Körper $\mathbb{Q}_p$ enthält $\sqrt{2}$ genau dann, wenn $p \equiv \pm 1$ modulo 8.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, daß der Körper $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$ der p-adischen Zahlen nicht in den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eingebettet werden kann.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß es p-adische Zahlen $a \in \mathbb{Q}_p$ gibt, die nicht Wurzeln von normierten Polynomen $F \in \mathbb{Q}[X]$ sind.

Abgabe: Bis Montag den 9.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $a \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl prim zu p. Verifizieren Sie, daß es ein $b \in \mathbb{Z}_p$ mit $b^n = a$ gibt.

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Zeigen Sie, daß $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ genau dann gilt, wenn a^{p-1} eine n-te Wurzel in $\mathbb{Q}_p$ für unendlich viele natürliche Zahlen $n \geq 1$ besitzt.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, daß es Körpereinbettungen $\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{C}$ geben muß.

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter ultrametrischer Raum und $a \in X$. Zeigen Sie, daß die Menge der Abstände

$$D = \{d(x, a) \mid x \in X, x \neq a\} \subset \mathbb{R}_{>0}$$

eine diskrete Teilmenge ist. Mit anderen Worten, zu jedem $x \in X$, $x \neq a$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}_{>0}$ so, daß $U \cap D = \{d(x, a)\}$ gilt.

Abgabe: Bis Montag den 16.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge.

(i) Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $K \subset X$ abgeschlossen ist.

(ii) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen anderen metrischen Raum Y. Zeigen Sie, daß das Bild $f(K) \subset Y$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper mit Absolutbetrag und V, W zwei normierte K-Vektorräume. Zeigen Sie, daß eine lineare Abbildung $f : V \to W$ genau dann stetig ist, wenn es eine reelle Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$$

für alle Vektoren $x \in V$.

Aufgabe 3. Sei K ein ultrametrischer Körper und $r > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto |x|^r$$

ebenfalls ein ultrametrischer Absolutbetrag ist.

Aufgabe 4. Seien $p \neq l$ zwei Primzahlen. Beweisen Sie, daß die beiden Körper $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_l$ nicht isomorph sind.

Abgabe: Bis Montag den 23.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 6

Aufgabe 1. Wir betrachten die Folgen

$$a_n = 1/n, \quad b_n = n, \quad c_n = n!, \quad d_n = 1/n!$$

im ultrametrischen Körper $\mathbb{Q}_p$. Welche dieser Folgen konvergieren? Welche besitzen einen Häufungspunkt?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß eine Folge $x_n \in X$, $n \geq 0$ in einem ultrametrischen Raum X genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn die reelle Folge $\lambda_n = d(x_{n+1}, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n \geq 0$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 3. Sei K ein ultrametrischer Körper und $x_n \in K$, $n \geq 0$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \neq 0$. Zeigen Sie, daß dann $|x| = |x_n|$ für alle $n \gg 0$.

Aufgabe 4. Wir sahen bereits, daß in einem ultrametrischen Raum X die Bälle $B_{<\epsilon}(x) \subset X$ offene und zugleich abgeschlossene Teilmengen sind. Beweisen Sie, daß es in $X = \mathbb{Q}_p$ offene Teilmengen geben muß, die nicht abgeschlossen sind.

Abgabe: Bis Montag den 30.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Exponentialreihe $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ nicht für alle $x \in \mathbb{Q}_p$ konvergiert.

Aufgabe 2. Sei $K = \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$. Zeigen Sie, daß der Bewertungsring O_K nicht noethersch ist. Mit anderen Worten, es existiert eine aufsteigende Folge

$$I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \ldots$$

von Idealen $I_n \subset O_K$, $n \geq 0$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, daß ein ultrametrischer Körper K genau dann vollständig ist, wenn seine Einheitssphäre $S_1(0) = \{x \in K \mid |x| = 1\}$ vollständig ist.

Aufgabe 4. Seien $p \neq l$ zwei Primzahlen. Beweisen Sie, daß die Körper $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ und $\mathbb{Q}_l^{\mathrm{alg}}$ isomorph sein müssen.

Abgabe: Bis Montag den 7.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 8

Aufgabe 1. Finden Sie ein $\epsilon > 0$ so, daß im Körper $\mathbb{Q}_2^{\mathrm{alg}}$ gilt:

$$x \in B_{<\epsilon}(\sqrt{-1}) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_2(x).$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper von Charakteristik Null und $K \subset E$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß diese Körpererweiterung in einer endlichen Galois-Erweiterung $K \subset L$ enthalten ist.

Aufgabe 3. Sei $f_n \in \mathbb{Q}_p[X]$, $n \geq 0$ eine Folge von normierten Polynomen vom festen Grad $d \geq 1$, die koeffizientenweise gegen ein Polynom $f \in \mathbb{Q}_p[X]$ konvergiert. Sei $a \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ eine Wurzel von f. Zeigen Sie, daß es für alle $n \gg 0$ Elemente $a_n \in \mathbb{Q}_p(a)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: $f_n(a_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$.

Aufgabe 4. Sei $K = \mathbb{C}_p$. Zeigen Sie, daß es im Bewertungsring $O_K = B_{\leqslant 1}(0)$ eine Folge a_n, $n \geq 0$ geben muss, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Abgabe: Bis Montag den 14.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 9

Aufgabe 1. Bestimmen Sie das Newton-Polygon von

$$f = 1 - p^{-1/2}X + X^3 + p^4X^4 \quad \text{und} \quad g = \prod_{i=1}^{p^2}(1 - X/i) \in \mathbb{C}_p[X].$$

Aufgabe 2. Sei $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}_p[X]$ ein *Eisenstein-Polynom*, das heißt

$$a_n \not\equiv 0 \mod p, \qquad a_0 \not\equiv 0 \mod p^2, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \equiv 0 \mod p.$$

Wie sieht das Newton-Polygon von f aus?

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{C}_p[X]$ ein Polynom mit $f(0) \neq 0$. Wie sieht das Newton-Polygon von f^2 im Vergleich zum Newton-Polygon von f aus?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß sich jedes $a \in \mathbb{C}_p^\times$ schreiben läßt als ein Produkt $x = \zeta \cdot p^r \cdot u$, wobei ζ eine Einheitswurzel, der Exponent r eine rationale Zahl, sowie $u \in O_{\mathbb{C}_p}$ ein Element des Bewertungsrings mit $u \equiv 1$ modulo $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ ist.

Abgabe: Bis Montag den 21.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie die p-adischen Bewertungen

$$\nu_p(23!) \quad \text{und} \quad \nu_p(100!)$$

für $p = 2, 3, 5, 7$.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie, daß die Reihe $\sum_{n\geq 0}(n! \cdot n)$ in $\mathbb{C}_p$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3. Sei $b_n \in \mathbb{C}_p$, $n \geq 0$ eine Folge und $\sigma \in S_\infty$ eine Permutation der natürlichen Zahlen. Beweisen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=0}^\infty b_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^\infty b_{\sigma(n)}$ konvergiert. Vergleichen Sie die Situation mit Reihen über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4. Sei $f = \sum_{n=0}^\infty \in \mathbb{C}_p[[X]]$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < \rho < \infty$. Zeigen Sie, daß f entweder für alle $x \in S_\rho(0)$ konvergiert, oder für alle $x \in S_\rho(0)$ divergiert. Vergleichen Sie die Situation mit Potenzreihen über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Abgabe: Bis Montag den 18.01. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 11

Aufgabe 1. Geben Sie explizit eine Potenzreihe $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{C}_p[[X]]$ an, dessen Newton-Polygon aus nur einem Segement besteht, und dessen Steigung $\mu \in \mathbb{R}$ irrational ist.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{C}_p[[X]]$ eine konvergente Potenzreihe, mit Konvergenzradius $\rho_f > 0$. Zeigen Sie, daß es zu jeder reellen Zahl $0 < r < \rho_f$ eine Faktorisierung $f = P \cdot g$ gibt, wobei $P \in \mathbb{C}_p[X]$ ein Polynom und $g \in \mathbb{C}_p[[X]]$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r < \rho_g$ gibt.

Aufgabe 3. Sei $a \in \mathbb{Z}_p$. Wir betrachten die Reihe

$$f = (1+X)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} X^n \in \mathbb{C}_p[[X]],$$

wobei der p-adische Binomialkoeffizient als

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}, \quad a \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N}.$$

definiert wird. Zeigen Sie, daß $\binom{a}{n} \in \mathbb{Z}_p$, und daß somit die Reihe $f = (1+x)^a$ Konvergenzradius $\rho \geq 1$ hat.

Aufgabe 4. Sei $f = \sum a_i X^i \in \mathbb{C}_p$ mit $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$. Wir definieren b als das Maximum der Beträge $|a_n|$, $n \geq 0$. Sei $N \geq 0$ der größte Index mit $|a_N| = b$. Zeigen Sie, daß f genau N Nullstellen $\omega \in \mathbb{C}_p$, $|\omega| \leqslant 1$ hat.

Abgabe: Bis Montag den 25.01. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 12

Aufgabe 1. Sein $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, daß der Bruch $p^{n-1}/n! \in \mathbb{Q}_p$ im Ganzheitsring $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ enthalten ist.

Aufgabe 2. Sei $f = \sum a_i X^i \in \mathbb{C}_p[[X]]$. Angenommen, $\lim_{i\to\infty} v(a_i)/i = \infty$. Zeigen Sie, daß der Konvergenzradius dieser Potenzreihe $\rho = \infty$ ist.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Mit anderen Worten, jedes Monom in f hat die Form

$$\alpha X_1^{d_1} \ldots X_n^{d_n} \quad \text{mit} \quad d_1 + \ldots + d_n = d.$$

Sei N_s die Anzahl der Nullstellen von f über $\mathbb{F}_{q^s}$. Zeigen Sie, daß $N_s - 1$ ein Vielfaches von $q^s - 1$ ist.

Aufgabe 4. Wir fassen die Determinante als Polynom

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} X_{i,\sigma(j)}$$

in n^2 Unbestimmten X_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ auf. Sei $H \subset \mathbb{A}^{n^2}_{\mathbb{F}_p}$ die Hyperebene, welche durch die Gleichung $f = 1$ gegeben ist. Berechnen sie die zugehörige Zeta-Funktion

$$Z_H(T) = \exp\Big(\sum_{s \geq 1} N_s T^s / s\Big).$$

Abgabe: Bis Montag den 01.02. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.