

Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$, und $n \geq 1$. Geben Sie alle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega^n = z$ in Polarkoordinaten an.

Aufgabe 2. Sei $X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ ein kubisches Polynom. Dessen drei Nullstellen sind nach der Cardanoschen¹ Formel von der Form

$$\omega = u + v,$$

wobei

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

und die beiden dritten Wurzeln unter der Nebenbedingung $uv = -p/3$ zu ziehen sind. Verifizieren Sie die Cardanosche Formel durch Einsetzen von ω in das Polynom.

Aufgabe 3. Sei $Z \subset \mathbb{C}$ die Teilmenge aller komplexen Zahlen, die sich aus $0, 1 \in \mathbb{C}$ *nur* mit Zirkel konstruieren lassen. Beweisen Sie, dass $Z \subset \mathbb{C}$ eine Untergruppe ist.

Bemerkung: Der frappierende Satz von Mohr-Mascheroni² besagt, dass die Teilmenge aller mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte mit der Teilmenge aller nur mit Zirkel konstruierbaren Punkte übereinstimmt.

¹Gerolamo Cardano (1501–1576), italienischer Arzt, Mathematiker und Astrologe.

²Georg Mohr (1640–1697), dänischer Mathematiker; Lorenzo Mascheroni (1750–1800), italienischer Mathematiker.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die 5-te Einheitswurzel $\zeta = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$ den Realteil $\operatorname{Re}(\zeta) = (\sqrt{5} - 1)/4$ besitzt. Benutzen Sie dafür, daß ζ eine Wurzel von

$$\frac{X^5 - 1}{X - 1} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

ist, und sich dieses Polynom vom Grad 4 mit dem Ansatz $Y = X + X^{-1}$ aus dem quadratische Polynom

$$Y^2 + Y - 1$$

gewinnen lässt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 21.4. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Schriftliche Prüfungen: Es wird 13 Übungsblätter geben, jeweils mit 4 Aufgaben, pro Aufgabe können 5 Punkte erreicht werden. Um zur schriftlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen Sie regelmäßig an den Übungen teilnehmen und 40% = 104 Übungspunkte erlangen.

Klausur: Montag der 19.07.2010 von 9:00–11:00 Uhr in HS 5D, 5F.

Nachklausur: Montag der 27.09.2010 von 9:00–11:00 Uhr im HS 5C.