

## Klausur Algebra

<p><b>Name, Vorname:</b></p> <p><b>Matrikelnummer:</b></p> <p><b>Studienfach:</b></p> <p><b>Studiengang (Bachelor oder Diplom):</b></p> <p><b>Fachsemester:</b></p>
---

Für Studenten im Bachelorstudiengang Mathematik nach der Prüfungsordnung von 2008:  
Hiermit melde ich mich zur schriftlichen Prüfung *Algebra* (Klausur, Nachklausur) an und bestätige, daß ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

.....  
Unterschrift

Legen Sie Ihren Studenten- und Lichtbildausweis sichtbar am Arbeitsplatz aus.  
Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt ihren Namen und begründen Sie Ihre Antworten.  
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.  
Erlaubte Hilfsmittel: Ein Din-A4 Blatt handschriftliche Notizen.  
Bearbeitungszeit: 120 Minuten.  
Klausureinsicht: Freitag, der 23.07.2010 von 14:00-14:45 Uhr im Seminarraum 25.22.03.73

1	2	3	4	5	$\Sigma$	Note

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass jede Gruppe  $G$  von Ordnung  $\text{ord}(G) = 319$  zyklisch sein muss.

**Aufgabe 2.** (i) Wie lauten die Sylow-Sätze?

(ii) Sei  $f : G \rightarrow G'$  ein surjektiver Homomorphismus von endlichen Gruppen,  $H \subset G$  eine  $p$ -Sylow-Untergruppe und  $H' = f(H)$  ihr Bild. Zeigen Sie, dass  $H' \subset G'$  eine  $p$ -Sylow-Untergruppe in  $G'$  ist.

**Aufgabe 3.** (i) Wie lauten die Definition von Hauptidealringen und faktoriellen Ringen?

(ii) Verifizieren Sie, dass das Polynom

$$f = X^7 + 42X^4 + 14X + 90 \in \mathbb{Q}[X]$$

irreduzibel ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $K \subset E$  eine Körpererweiterung, und  $\alpha, \beta \in E$  zwei algebraische Elemente. Angenommen,  $m = \deg(\alpha)$  und  $n = \deg(\beta)$  sind relativ prim. Zeigen Sie, dass dann

$$[K(\alpha, \beta) : K] = mn$$

gilt.

**Aufgabe 5.** (i) Auf welche drei Weisen lassen sich Galois-Erweiterungen charakterisieren?

(ii) Sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(e^{2\pi\sqrt{-1}/n})$$

eine Galois-Erweiterung ist.

**Begründen Sie ihre Antworten ausführlich! Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.**