

# Einführung in die Algebraische Geometrie

## Blatt 1

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Teilmengen sind algebraisch, welche nicht?

- Der Einheitskreis in  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ .
- Der Einheitskreis in  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ .
- Der Kern der komplexen Exponentialabbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , aufgefasst als Teilmenge von  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ .
- Ein Intervall in  $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $k$  ein Körper und  $\sigma : k \rightarrow k$  ein Körperautomorphismus. Zeigen Sie, dass mit jeder algebraischen Teilmenge  $X \subset \mathbb{A}^n(k)$  auch die Teilmenge

$$\sigma(X) = \{(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \mid (a_1, \dots, a_n) \in X\} \subset \mathbb{A}^n(k)$$

algebraisch ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $k$  ein Körper und  $m, n \geq 0$  natürliche Zahlen. Wir identifizieren den affinen  $mn$ -Raum  $\mathbb{A}^{mn}(k) = k^{mn}$  mit der Menge der  $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $k$ . Zeigen Sie, dass die Menge

$$X_r \subset \mathbb{A}^{mn}(k)$$

aller Matrizen  $B$  vom Rank  $\text{rank}(B) < r$  algebraisch ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $a = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ . Finden Sie ein geeignetes Polynom  $g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  mit

$$V(g) = \{a\}.$$

Folgern Sie daraus, dass *jede* algebraische Teilmenge  $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  von der Form  $X = V(f)$  für ein geeignetes Polynom  $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  ist.

**Abgabe:** Bis Freitag, den 22.10. um 9:15 Uhr in den Zettelkästen.

### **Semesterapparat:**

Klaus Hulek: Elementare algebraische Geometrie.  
Vieweg, Braunschweig, 2000.

Miles Reid: Undergraduate algebraic geometry.  
Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Egbert Brieskorn, Horst Knörrer: Ebene algebraische Kurven.  
Birkhäuser, Basel, 1981.

Brendan Hassett: Introduction to algebraic geometry.  
Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Ernst Kunz: Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie. Vieweg, Braunschweig, 1980.

Christian Peskine: An algebraic introduction to complex projective geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Karen Smith, et al.: An invitation to algebraic geometry.  
Springer, New York, 2000.

William Fulton: Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry.  
Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

Robin Hartshorne: Algebraic geometry.  
Springer, New York, 1977.