Aufgabe 1: Die Düsseldorfer Niederlassung des japanischen Pharma-Konzerns Hatschi veranstaltet eine große Weihnachtsfeier für die gesamte Belegschaft. Um ordentlich mitfeiern zu können, möchte der Angestellte Klaus Thaler mit der Bahn fahren, befürchtet jedoch je nach Wetterlage erhebliche Verspätungen im Fahrplan. Die Rheinbahn gibt an, dass bei guten Wetterverhältnissen 95% aller Bahnen pünktlich fahren. Bei Schnee betrage die Wahrscheinlichkeit für eine Verspätung jedoch 0,7. Laut Wetterbericht liegt die Schneefall-Wahrscheinlichkeit am Tag der Weihnachtsfeier bei 0,4. Bezeichnen Sie mit A, B die folgenden Ereignisse:

$$A \;\hat{=}\; \text{Die Bahn hat Verspätung.}$$
$$B \;\hat{=}\; \text{Es schneit.}$$

a) Benutzen Sie obige Angaben zur Festlegung der Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P(B^c)$, der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(A|B^c)$, sowie der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A^c|B)$ und $P(A^c|B^c)$. (3 Punkte)

b) Wie groß ist die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bahn pünktlich fährt? (4 Punkte)

c) Am Tag der Weihnachtsfeier passiert es tatsächlich: Die Bahn hat Verspätung und Klaus kommt zu spät zur Feier. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es schneit. (3 Punkte)

a) $P(B) = 0{,}4 \qquad P(B^c) = 0{,}6$

$P(A|B) = 0{,}7 \qquad P(A^c|B) = 0{,}3$

$P(A|B^c) = 0{,}05 \qquad P(A^c|B^c = 0{,}95$

b) $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$

$= 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 0{,}6 = 0{,}28 + 0{,}03 = 0{,}31$

$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 0{,}69$

c) $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}4}{0{,}31} = \dfrac{0{,}28}{0{,}31} \simeq 0{,}903$

Aufgabe 2: Die Firma Hatschi möchte ein altes Medikament gegen eine schwer heilbare Krankheit vom Markt nehmen und durch ein neues ersetzen. Die Heilungswahrscheinlichkeit des alten Medikaments betrug $p_0 = 0{,}08$. Vor der Markteinführung soll nun signifikant zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ nachgewiesen werden, dass das neu entwickelte Medikament eine höhere Heilungswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ besitzt als das alte. Es soll also die Hypothese $H_0 : p \leq p_0$ gegen die Alternative $H_1 : p > p_0$ getestet werden. Dazu werden $n = 240$ Patienten mit dem neuen Medikament behandelt und anschließend daraufhin untersucht, ob es bei ihnen gewirkt hat. Wir gehen dabei davon aus, dass die Patienten unabhängig voneinander auf das Medikament reagieren.

a) Begründen Sie, warum Hypothese und Alternative für das vorliegende Testproblem wie oben angegeben gewählt werden (und nicht etwa umgekehrt). (2 Punkte)

b) Geben Sie die genaue Testvorschrift an und bestimmen Sie den kritischen Wert c. Verwenden Sie dazu die beigefügte Tabelle. (6 Punkte)

c) Bei 25 der 240 Patienten führte die Anwendung zum Heilungserfolg. Welche Entscheidung ist aufgrund dieser Beobachtung zu treffen? (2 Punkte)

a) Es soll signifikant nachgewiesen werden, dass die Heilungs-WS p größer ist als p_0, also $p > p_0$. Was signifikant nachgewiesen werden soll, muss als Alternative formuliert werden (um die Fehler-WS 1. Art zu kontrollieren).

b) $X_i := \begin{cases} 1 & i\text{-ter Patient geheilt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad 1 \leq i \leq n = 240$

$X_i \sim B(1,p)$, $\quad X := \sum_{i=1}^{240} X_i \sim B(240,p)$, $\quad x := \sum_{i=1}^{240} x_i$

$\varphi(x_1,\dots,x_{240}) = \begin{cases} 1 & x > c \\ 0 & x \leq c \end{cases}$

$E_0(\varphi) = P_0(X > c) = \sum_{k=c+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \overset{!}{\leq} \alpha = 0{,}05$

$\sum_{k=c}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \overset{!}{>} \alpha$

Tabelle: $c = 26$

c) $25 < c = 26 \Rightarrow H_1$ kann nicht nachgewiesen werden

Entscheidung für H_0

Aufgabe 3: Ein neues Medikament zur Blutdrucksenkung wird in einer Testreihe $n = 200$ Patienten verabreicht. Es bezeichne $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ die Zufallsvariable, die angibt, ob sich beim i-ten Patienten ein Erfolg eingestellt hat, wobei 1$\hat{=}$ "Erfolg" und 0$\hat{=}$ "kein Erfolg". Die Erfolgswahrscheinlichkeit liege bei jedem einzelnen Patienten bei $p = 0{,}7$. Sei X die Anzahl der erfolgreich behandelten Patienten.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X. Bestimmen Sie außerdem den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

(4 Punkte)

b) Bestimmen Sie mithilfe einer Normalapproximation (ohne Stetigkeitskorrektur) anhand der beigefügten Tabelle näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich bei den 200 Patienten insgesamt mindestens 135 und höchstens 150 Heilungserfolge einstellen, also $P(135 \leq X \leq 150)$.

(6 Punkte)

a) $X_i \sim B(1, p) \qquad p = 0{,}7$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p) \qquad n = 200, p = 0{,}7$

$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}7 = 140$

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 42$

b) $P(135 \leq X \leq 150) = P(X \leq 150) - P(X \leq 134)$

$= P\left(\frac{X-140}{\sqrt{42}} \leq \frac{150-140}{\sqrt{42}}\right) - P\left(\frac{X-140}{\sqrt{42}} \leq \frac{134-140}{\sqrt{42}}\right)$

$\approx \Phi(1{,}54) - \Phi(-0{,}93) = \Phi(1{,}54) - (1 - \Phi(0{,}93))$

$\approx 0{,}938220 - 1 + 0{,}823814 = 0{,}762034$

Aufgabe 4: In einem Krankenhaus liegen 70 Patienten, von denen zufällig einer ausgewählt wird. 42 der Patienten sind Frauen und 19 Patienten sind privatversichert. Von den Männern sind 9 Patienten privatversichert. Es bezeichne A das Ereignis, dass eine Frau ausgewählt wird und B das Ereignis, dass der ausgewählte Patient privatversichert ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$.

(4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zufällig ausgewählte Patient kein privatversicherter Mann ist und stellen Sie das Ereignis als Verknüpfung von A und B dar.

(3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau oder ein privatversicherter Mann ausgewählt wird und stellen Sie das Ereignis als Verknüpfung von A und B dar.

(3 Punkte)

	Mann	Frau	Σ
privat	9	10	19
nicht "	19	32	51
Σ	28	42	70

a) $P(A) = \frac{42}{70} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$P(B) = \frac{19}{70}$

$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{19}{70} = \frac{51}{70}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10 \cdot 70}{70 \cdot 19} = \frac{10}{19}$

b) $P((A^c \cap B)^c)$ $[= P(A \cup B^c)]$ $= 1 - P(A^c \cap B) = 1 - \frac{9}{70} = \frac{61}{70}$

c) $P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(A^c \cap B) = \frac{42}{70} + \frac{9}{70} = \frac{51}{70}$

$[= P(A \cup B)]$