

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei C eine Kurve und $C' \subset C$ ein Unterschema, das zugleich offen und abgeschlossen ist. Verifizieren Sie, dass C' auch eine Kurve sein muss.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es zu dem Paar $a \geq 1, g \geq 0$ eine Kurve C mit den numerischen Invarianten

$$h^0(\mathcal{O}_C) = a \quad \text{und} \quad h^1(\mathcal{O}_C) = g$$

gibt.

Aufgabe 3. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein endlicher, lokal freier Morphismus von Schemata. Beweisen Sie, dass für jeden lokal freien \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{E} vom endlichen Rang das direkte Bild $f_*(\mathcal{E})$ auch lokal frei vom endlichen Rang ist, und zwar sowohl als Modul über $f_*(\mathcal{O}_X)$, als auch als Modul über \mathcal{O}_Y .

Aufgabe 4. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein affiner Morphismus von Schemata. Beweisen Sie, dass der Funktor

$$\mathcal{F} \longmapsto f_*(\mathcal{F})$$

eine Äquivalenz zwischen der Kategorie $\text{QCoh}(X)$ der quasikohärenten \mathcal{O}_X -Moduln und der Kategorie der $f_*(\mathcal{O}_X)$ -Moduln, welche quasikohärent als \mathcal{O}_Y -Moduln sind, liefert.

Abgabe: Bis Montag, den 16.01.2012 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.