

## Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

### Blatt 1

**Aufgabe 1.** Seien  $r, s$  zwei Zahlen.

(i) Drücken Sie die Diskriminante  $\Delta$  der quadratischen Gleichung

$$(X - r)(X - s) = 0$$

in Abhängigkeit von  $r, s$  aus.

(ii) Wie ändert sich die Diskriminante  $\Delta$  der quadratischen Gleichung

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

wenn die Unbestimmte  $X$  durch  $rY - s$  ersetzt wird?

**Aufgabe 2.** Seien  $X, Y$  zwei Menge und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Ferner seien  $A, B \subset X$  sowie  $U, V \subset Y$  Teilmengen. Verifizieren Sie, dass

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{und} \quad f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Zeigen Sie weiterhin durch ein Gegenbeispiel, dass die erste Inklusion im Allgemeinen keine Gleichheit ist.

**Aufgabe 3.** Seien  $a, b, x, y$  vier Dinge. Zeigen Sie, dass

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

genau dann gilt, wenn  $a = x$  und  $b = y$ .

(Tipp: Unterscheiden Sie die beiden Fälle  $a = b$  und  $a \neq b$ .)

**Aufgabe 4.** Wir betrachten die Verknüpfung auf der Menge  $\mathbb{Z}$ , die durch

$$\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \longmapsto m + 2n,$$

sowie die Verknüpfung auf der Menge  $V = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , welche durch

$$\boxtimes : V \times V \longrightarrow V, \quad ((a, b), (c, d)) \longmapsto (ac, b + ad)$$

gegeben ist. Sind diese Verknüpfungen assoziativ? Sind sie kommutativ? Erlauben sie ein neutrales Element?

**Abgabe:** Bis Mittwoch, den 29.10. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

#### **Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:**

1. Beschäftigen Sie sich bereits ab dem Tag der Ausgabe mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Sprechen* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben!
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in korrekten und *vollständigen* deutschen Sätzen auf!
5. Vermeiden Sie weitestgehend die Verwendung von logischen Symbolen wie  $\forall, \exists, \Leftrightarrow, \dots$  im Text! In abgesetzten Formel sind Ausnahmen erlaubt.
6. Wenn Sie eine Gleichheit  $X = Y$  von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion  $X \subset Y$  und  $Y \subset X$  verifizieren!
7. Wollen Sie beweisen, dass „ $A$  genau dann gilt, wenn  $B$  gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn  $A$ , dann  $B$ “ sowie „wenn  $B$ , dann  $A$ “ zeigen! (Ersteres besagt, dass  $B$  *notwendig* für  $A$  ist, während Letzteres bedeutet, dass  $B$  *hinreichend* für  $A$  ist.)
8. Die Aussage „wenn  $A$ , dann  $B$ “ ist äquivalent zur Aussage „wenn  $B$  nicht gilt, dann gilt  $A$  nicht“.
9. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dies so einfach wie möglich.