Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. Seien R_1, R_2 zwei Ringe. Wir definieren auf der Produktmenge $R = R_1 \times R_2$ zwei Verknüpfungen durch

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

Verifizieren Sie, dass R dadurch zu einem Ring wird. Handelt es sich dabei um einen Körper, falls R_1, R_2 Körper sind?

Aufgabe 2. (i) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in cartesischen Koordinaten:

$$(3 - i)^{-1}, \quad \frac{1 + 2i}{3 + 4i}, \quad (1 + i)^3, \quad e^{n\pi i} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(ii) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten an:

$$1 + i, \quad i - 1, \quad i^{100}, \quad 1/e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

(iii) Bestimmen Sie für die komplexe quadratische Gleichung

$$X^2 - (6 + 3i)X + (7 + 9i) = 0$$

die komplexen Lösungen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ von der Form

$$z = w/\overline{w}$$

für ein $w \in \mathbb{C}^\times$ ist.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge

$$\mu_n(\mathbb{C}) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^\times \mid \zeta^n = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^\times.$$

Verifizieren Sie, dass mit zwei Elementen ζ, ω auch das Produkt $\zeta \cdot \omega$ in $\mu_n(\mathbb{C})$ enthalten ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Menge $\mu_n(\mathbb{C})$ versehen mit der komplexen Multiplikation eine Gruppe bildet. Rechnen Sie schliesslich mittels Polarkoordinaten aus, dass diese Gruppe genau n Elementen enthält, und skizzieren Sie diese für $n = 8$ in der komplexen Zahlenebene.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 5.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte verwenden Sie das **Deckblatt** und **tackern** Sie Ihre Abgaben!