Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$. Verifizieren Sie explizit, dass die Lösungsmenge $L \subset K^n$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 2. Welche der Teilmengen

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x, y, z) \mid x < 0\}, \\
U_2 &= \left\{(x, y, z) \mid 3xy = z^2\right\}, \\
U_3 &= \{(x, y, z) \mid 3x + 2y = -z\}, \\
U_4 &= \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{Q}\}, \\
U_5 &= \{(t, 3t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

des reellen Standdardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Beweisen Sie, dass die Menge $V = \mathscr{P}(X)$ aller Teilmengen $A \subset X$ durch die Verknüpfung

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (A, B) \longmapsto (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$$

zu einer abelschen Gruppe wird. Zeigen Sie ferner, dass diese abelsche Gruppe V auf genau eine Weise zu einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ gemacht werden kann.

Aufgabe 4. Sei $V \neq 0$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ist es möglich, dass die zugrundeliegende abelsche Gruppe V zugleich die Struktur eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraumes für eine Primzahl $p > 0$ trägt? Gibt es Beispiele, bei denen V die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes besitzt?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.11. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Wenn Sie Resultate **aus der Vorlesung zitieren** wollen, folgen Sie bitte der wissenschaftlichen Praxis und schreiben beispielsweise: ,,Wegen [Vorlesung], Proposition 3.12, gilt..."