Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. (i) Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$$

eine Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen ist.

(ii) Berechnen Sie die Längen und den Winkel für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

aufgefasst als Vektoren im euklidischen Vektorraum $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Sei E ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U, V \subset E$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp \quad \text{und} \quad (U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die fünf Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_5)$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ und entscheiden Sie, ob A trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ aller Kongruenzklassen $[a]$ modulo $n = 3$ und den K-Vektorraum V aller Abbildungen $v : G \to K$. Darauf haben wir den Endomorphismus $f : V \to V$, welcher durch

$$f(v)([i]) = v([i + 1])$$

gegeben wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ und diskutieren Sie, unter welchen Voraussetzungen an den Körper K der Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trigonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 4.2. um 10:25 Uhr im Zettelkasten.