Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 14/15

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Zweite Klausur am 1. April 2015

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Einschreibungssemester:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben die gesamte Klausur über im Rucksack verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraumes $U \subset V$, der von den beiden Funktionen

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$$

erzeugt wird.

Aufgabe 2. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung zwischen K-Vektorräumen, und

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in V\} \subset V \times W$$

ihr Graph. Zeigen Sie, dass die Abbildung f linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. Schreiben Sie den Vektor $(-8i, 4i - 9, -3i) \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$a = (1, -i, 2), \quad b = (-2, 1 + 2i, -1), \quad c = (-2i, i - 2, 1 - i) \in \mathbb{C}^3.$$

Aufgabe 4. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Berechnen Sie mithilfe einer Laplace-Entwicklung die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ 1 & b & 1 & \\ & 1 & c & 1 \\ & & 1 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

Geben Sie ein konkretes Beispiel für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ an, bei dem die Matrix A invertierbar ist, sowie eins, bei dem A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$, und $V \subset \mathrm{Mat}_2(K)$ der Untervektorraum der Matrizen A mit Spur $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto {}^tA.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$ sowie die Eigenwerte von f, und entscheiden Sie, ob der Endomorphismus diagonalisierbar ist.