

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 14 \\ -6 & -6 & 28 \\ -3 & -5 & 18 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$

- (i) Berechnen Sie A^2 .
- (ii) Finden Sie nichttriviale Linearkombinationen $\lambda_0 A^0 + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 = 0$ und bestimmen Sie damit das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[T]$.
- (iii) Wie lautet die Jordan-Normalform von A ?

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Benutzen Sie die Jordan-Normalform, um die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen von trigonalisierbaren Matrizen

$$A \in \text{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$$

zu bestimmen. Wieviele davon sind nilpotent?

Aufgabe 3. Sei K ein beliebiger Körper. Benutzen Sie die Jordan-Normalform, um zu zeigen, dass jede Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ ähnlich zur transponierten Matrix ${}^t A \in \text{Mat}_n(K)$ ist.

Aufgabe 4. (i) Sei K ein Körper und

$$J = J_{10} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & & \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{10}(K)$$

die Jordan-Matrix der Grösse 10×10 zum Eigenwerte $\lambda = 0$. Was ist die Jordan-Normalform der Potenzen J^2 sowie J^3 ?

(ii) Sei nun $J_n \in \text{Mat}_n(K)$ die Jordan-Matrix der Grösse $n \times n$ und $1 \leq d \leq n$ ein Exponent. Stellen Sie eine Vermutung für die Jordan-Normalform von J_n^d auf.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28.5. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.