Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und $U \subset K^4$ der von den Vektoren

$$a = (1, 2, 3, 4) \quad \text{und} \quad b = (1, 1, -1, -1)$$

erzeugte Untervektorraum. Geben Sie ein Komplement $U' \subset K^4$ an.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Geben Sie alle A-invarianten Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K).$$

Finden Sie alle J-invarianten Untervektorräume $U \subset K^3$.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V. Beweisen Sie, dass jeder Untervektorraum f-invariant ist genau dann, wenn $f = \lambda \, \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$. (Solche Endomorphismen nennt man auch *Homothetien*.)

Abgabe: Bis Donnerstag, den 16.4. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Bitte verwenden Sie das **Deckblatt** und **tackern** Sie Ihre Abgaben!

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits ab dem Tag der Ausgabe mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Sprechen* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben!
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in korrekten und *vollständigen* deutschen Sätzen auf!
5. Vermeiden Sie weitestgehend die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ etc. im Text! In abgesetzten Formel sind Ausnahmen erlaubt.
6. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren!
7. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B" sowie „wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
8. Die Aussage „wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
9. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dies so einfach wie möglich.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei S ein Monoid und $G = S^\times$ seine Einheitengruppe. Wir definieren auf der Menge S durch

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \in G \text{ mit } b = gag^{-1}$$

eine Relation. Rechnen Sie nach, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $n \geq 0$. Wir definieren auf der Menge $X = K^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ eine Relation

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in K^\times \text{ mit } b = \lambda a.$$

(i) Verifizieren Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Der Quotient wird mit $\mathbb{P}^n(K)$ bezeichnet, die Äquivalenzklasse von $(a_0, \ldots, a_n)$ mit $(a_0 : \ldots : a_n)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{P}^1(K) \longrightarrow K \cup \{\infty\}, \quad (a_0 : a_1) \longmapsto \begin{cases} a_1/a_0 & \text{wenn } a_0 \neq 0; \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Hierbei ist ∞ ein formales Symbol.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum und $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume. Wir betrachten die kanonische lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow (V/U) \oplus (V/U'), \quad x \longmapsto (x + U, x + U').$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist genau dann, wenn $V = U \oplus U'$ eine direkte Summenzerlegung ist.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $V = U \oplus U'$ seine Fitting-Zerlegung, also

$$U = \mathrm{Ker}(f^\infty) \quad \text{und} \quad U' = \mathrm{Im}(f^\infty).$$

Sei $h : V \to V$ ein weiterer Endomorphismus, mit der Eigenschaft $f \circ h = h \circ f$. Beweisen Sie, dass die Untervektorräume $U, U' \subset V$ h-invariant sein müssen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 23.4. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Wir ermuntern Sie, die Aufgaben untereinander zu diskutieren. Die Abgaben müssen jedoch **individuell, handschriftlich und ohne elektronische Hilfsmittel** erfolgen.

Zulassungsvoraussetzung für die Klausuren:

Für Mathematiker: Regelmäßige Teilnahme an den Übungsgruppen (Anwesenheitspflicht mit Unterschriftenliste, höchstens zweimaliges unentschuldigtes Fehlen) und Erreichen von 40% = 12 x 20 x 0,4 = 96 Punkten bei den Aufgabenblättern. Haben Sie in der Vergangenheit an einer Prüfung zur Linearen Algebra II ohne Erfolg teilgenommen, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Für Informatiker und Physiker: Erreichen von 32% = 40% x 0,8 = 77 Punkten bei den Aufgabenblättern (80%-Regel). Hatten Sie in der Vergangenheit die Zulassung für eine Prüfung zur Linearen Algebra II, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Webseite zur Lehrveranstaltung:
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~schroeer/15_ss_LA2/2015_ss_linear_algebra_2.html`

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Wir betrachten in $V = \mathrm{Mat}_n(K)$, $n \geq 1$ die drei Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subset V$ der Skalarmatrizen, der Diagonalmatrizen bzw. der oberen Dreiecksmatrizen. Was sind die Dimensionen der Quotientenvektorräume

$$U_3/U_1, \quad U_3/U_2, \quad V/U_1, \quad V/U_2 \quad \text{und} \quad V/U_3?$$

Aufgabe 2. Wir betrachten auf der Menge $\mathrm{Mat}_n(K)$ die Relation

$$A \sim B \quad \iff \quad \exists S, T \in \mathrm{GL}_n(K) \text{ mit } B = SAT.$$

Verifizieren Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum und $U', U \subset V$ und $W' \subset W \subset V$ Untervektorräume. Deduzieren Sie aus dem Isomorphiesatz die Identifizierungen

$$(U + U')/U' = U/(U \cap U') \quad \text{und} \quad (V/W')/(W/W') = V/W.$$

Geben Sie für diese Identifizierungen nichttriviale Beispiele an, mit Untervektorräumen von

$$V = \mathrm{Mat}_n(K).$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir betrachten in $V = \prod_{n=0}^{\infty} K$ den Untervektorraum $U = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K$. Beweisen Sie, dass der Quotientenvektorraum V/U unendlich-dimensional ist. (Tipp: Konstruieren Sie einen Endomorphismus, der surjektiv aber nicht injektiv ist.)

Abgabe: Bis Donnerstag, den 30.4. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Schreiben Sie im Ring $\mathbb{F}_7[T]$ das Polynom

$$h = T^5 + 6T^4 + 6T^3 + T + 2$$

als Produkt von Linearfaktoren sowie einem Polynom ohne Nullstellen, und bestimmen Sie somit die Multiplizitäten der Wurzeln.

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(f_0, f_1)$ in $\mathbb{Q}[T]$ für die Polynome

$$f_0 = 2T^3 - 4T^2 + T - 2 \quad \text{und} \quad f_1 = T^3 - T^2 - T - 2,$$

und schreiben Sie ihn in der Form $g = a_0 f_0 + a_1 f_1$.

Aufgabe 3. Sei T eine Unbestimmte. Wir betrachten hier die formalen Binomialkoeffizienten

$$\binom{T+n}{n} = \frac{(T+n)(T+(n-1))\cdots(T+1)}{n!}$$

als Elemente des Polynomrings $\mathbb{Q}[T]$. Zeigen Sie, dass diese Polynome

$$b_n = \binom{T+n}{n}, \quad n \geq 0$$

eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}[T]$ bilden.

Aufgabe 4. Sei

$$f(T) = T^n + \alpha_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \in K[T]$$

ein normiertes Polynom. Wir betrachten die endliche K-Algebra

$$A = K[T]/fK[T],$$

und die Restklasse $t \in A$ der Unbestimmten.

(i) Stellen Sie die Matrix der Multiplikationsabbildung

$$t : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto tx$$

bezüglich der Basis $t^0, t^1, \ldots, t^{n-1} \in A$ auf.

(ii) Folgern Sie, dass $t : A \to A$ bijektiv ist genau dann, wenn $f(0) \neq 0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 7.5. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie explizit die Matrizen, die entstehen, wenn

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

in die folgenden drei Polynome eingesetzt wird:

$$f(T) = T^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(T) = (T-i)(T+i) \quad \text{und} \quad h(T) = \chi_A(T).$$

Aufgabe 2. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\mu_{A+B}(T) = \mu_A(T) + \mu_B(T)$.

(ii) $\mu_{A^2}(T^2) = \mu_A(T)$

(iii) $\mu_A(0) = (-1)^n \det(A)$.

(iv) A ist Skalarmatrix genau dann, wenn $\deg(\mu_A) = 1$.

(v) Ist $\mu_A(B) = 0$, so ist jeder Eigenwert von B auch ein Eigenwert von A.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Angenommen, für ein $r \geq 0$ sind die zwei Vektoren

$$f^r, f^{r+1} \in \mathrm{End}_K(V)$$

linear abhängig. Zeigen Sie, dass f höchstens zwei Eigenwerte besitzt. Stellen Sie weiterhin eine Vermutung für den Fall auf, dass $f^r, \ldots, f^{r+d} \in \mathrm{End}_K(V)$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f : V \to V$ ein Automorphismus, und $g : V \to V$ die inverse Abbildung. Drücken Sie das Minimalpolynom

$$\mu_g(T) \in K[T]$$

durch das Minimalpolymon $\mu_f(T)$ aus. Betrachten Sie dabei zunächst die Spezialfälle $V = K$ sowie $V = K^2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 13.5. um 18:00 Uhr im Zettelkasten (wegen Christi Himmelfahrt).

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 1. (i) Sei $h = aT^2 + bT + c \in K[T]$ ein quadratisches Polynom und $h' \in K[T]$ seine formale Ableitung. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus
$$g = \mathrm{ggT}(h, h').$$
Folgern Sie, dass h separabel ist genau dann, wenn die Diskriminante
$$\Delta = b^2 - 4ac \in K$$
nicht verschwindet. Machen Sie dabei die Fallunterscheidung $p \neq 2$ und $p = 2$ für die Charakteristik $p \geq 0$ des Körpers K.

(ii) Schliessen Sie damit, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$, die keine Skalarmatrix ist, genau dann halbeinfach ist, wenn $\mathrm{Tr}(A)^2 \neq 4\det(A)$ gilt.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K).$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T) \in K[T]$.

(ii) Zerlegen Sie es in Linearfaktoren, indem Sie Eigenwerte raten.

(iii) Machen Sie eine Liste der möglichen Minimalpolynome.

(iv) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in K[T]$, indem Sie in die möglichen Polynome einsetzen.

(v) Entscheiden Sie, ob A trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Matrix

$$A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

die über $K = \mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeigen Sie, dass sie über $K = \mathbb{C}$ diagonalisierbar sein muss. Geben Sie ein explizites Beispiel an. Gilt diese Eigenschaft auch für reelle 4×4-Matrizen?

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum,

$$f : V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus und $U \subset V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Beweisen Sie: Wenn $f : V \to V$ trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist, so gilt die entsprechende Eigenschaft auch für die induzierten Endomorphismen

$$U \longrightarrow U \quad \text{und} \quad V/U \longrightarrow V/U.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 21.5. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 14 \\ -6 & -6 & 28 \\ -3 & -5 & 18 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}).$$

(i) Berechnen Sie A^2.

(ii) Finden Sie nichttriviale Linearkombinationen $\lambda_0 A^0 + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 = 0$ und bestimmen Sie damit das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[T]$.

(iii) Wie lautet die Jordan-Normalform von A?

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Benutzen Sie die Jordan-Normalform, um die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen von trigonalisierbaren Matrizen

$$A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$$

zu bestimmen. Wieviele davon sind nilpotent?

Aufgabe 3. Sei K ein beliebiger Körper. Benutzen Sie die Jordan-Normalform, um zu zeigen, dass jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ähnlich zur transponierten Matrix ${}^tA \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist.

Aufgabe 4. (i) Sei K ein Körper und

$$J = J_{10} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{10}(K)$$

die Jordan-Matrix der Grösse 10×10 zum Eigenwerte $\lambda = 0$. Was ist die Jordan-Normalform der Potenzen J^2 sowie J^3?

(ii) Sei nun $J_n \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Jordan-Matrix der Grösse $n \times n$ und $1 \leqslant d \leqslant n$ ein Exponent. Stellen Sie eine Vermutung für die Jordan-Normalform von J_n^d auf.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28.5. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut SS 15
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Wie lauten die Jordan-Normalformen der folgenden komplexen 3×3-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

die Jordan-Matrix zum Eigenwert $\lambda \in K^\times$. Zeigen Sie, dass $J_{n,\lambda^{-1}}$ die Jordan-Normalform der inversen Matrix $(J_{n,\lambda})^{-1}$ ist.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie vermöge der Jordan-Normalform, dass jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine ,,Quadratwurzel" erlaubt: Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$.

(ii) Bleibt diese Aussage richtig für nicht-invertierbare Matrizen?

Aufgabe 4. Seine $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar. Beweisen Sie durch Betrachtung der möglichen Jordan-Normalformen, dass für $n \leqslant 6$ die Matrizen A, B ähnlich sind genau dann, wenn

$$\chi_A(T) = \chi_B(T), \qquad \mu_A(T) = \mu_B(T),$$

und die Eigenwerte $\lambda \in K$ die gleichen geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda \geq 1$ haben. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für $n = 7$ nicht mehr gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.6. um 18:00 Uhr im Zettelkasten (wegen Fronleichnam).

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir schreiben $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Welche der Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= (x_1 - y_2)^2 \\
\Psi(x,y) &= x_2 y_1 - x_1 y_2 \\
\Theta(x,y) &= x_1^2 - x_1 y_2 + y_2^2 \\
\Upsilon(x,y) &= x_1 y_1 + 2 \\
\Delta(x,y) &= x_1 y_1 + x_1 y_2.
\end{aligned}$$

liefern Bilinearformen auf dem Standardvektorraum $V = K^2$?

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der 4-dimensionale reelle Untervektorraum aller komplexen Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi(B, C) = \det(B + C) - \det(B) - \det(C)$$

eine Bilinearform auf V ist. Wählen Sie eine Basis $B_1, \ldots, B_4 \in V$ und stellen Sie die Gram-Matrix auf.

Aufgabe 3. Wir betrachten die reellen 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass A, B als komplexe Matrizen kongruent sind, jedoch als reelle Matrizen nicht kongruent sind.

Aufgabe 4. Sei U ein Vektorraum, U^* sein Dualraum, und $V = U \oplus U^*$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad ((x, f), (y, g)) \longmapsto f(y) - g(x).$$

Zeigen Sie, dass Φ eine Bilinearform ist, welche alternierend und nichtentartet ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 11.6. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $a_1, \ldots, a_m \in V$ und $b_1, \ldots, b_n \in W$ Basen, und $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ die resultierende Matrix zu f. Rechnen Sie nach, dass die Transponierte ${}^tA$ die Matrix zur dualen Abbildung

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$

bezüglich der dualen Basen $a_1^*, \ldots, a_m^* \in V^*$ und $b_1^*, \ldots, b_n^* \in W^*$ ist.

Aufgabe 2. Sei V ein reller Vektorraum von Dimension $n \geq 1$, versehen mit einer nichtentarteten symmetrischen Bilinearform $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Signatur $(p, q) = (n-1, 1)$. Sei $a \neq 0$ ein Vektor und $U \subset V$ sein orthogonales Komplement.

(i) Verifizieren Sie, dass die Einschränkung von Φ auf U nichtentartet ist genau dann, wenn $a \in V$ nicht lichtartig ist, also entweder raumartig oder zeitartig ist.

(ii) Bestimmen Sie in diesem Fall die Signatur von $\Phi : U \times U \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, versehen mit einer Bilinearform $\Phi : V \times V \to K$, die symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Man bezeichnet die Teilmenge

$$V^0 = \{x \in V \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}.$$

als das *Radikal* der Bilinearform. Zeigen Sie, dass $V^0 \subset V$ ein Untervektorraum ist, und dass

$$\Psi(x + V^0, y + V^0) = \Phi(x, y)$$

eine wohldefinierte Bilinearform auf dem Quotientenvektorraum V/V^0 liefert, welche nichtentartet ist.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $p \neq 2$. Wir bezeichen mit $\langle x, h\rangle = h(x)$ die kanonische Paarung $V \times V^* \to K$. Sei $a \in V$ ein Vektor und $a^\vee \in V^*$ eine Linearform mit $\langle a, a^\vee\rangle = 2$. Wir bilden dazu den Endomorphismus

$$s = s_{a,a^\vee} : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - \langle x, a^\vee\rangle a.$$

Zeigen Sie Folgendes:

(i) Es gilt $s^2 = \mathrm{id}_V$, und der Endomorphismus s ist diagonalisierbar.

(ii) Die Hyperebene $\mathrm{Ker}(a^\vee) \subset V$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$, die Gerade $Ka \subset V$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(iii) Jeder Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f^2 = \mathrm{id}_V$, bei dem der Eigenwert $\lambda = -1$ die algebraische Multiplizität $m = 1$ hat, ist von der Form $f = s_{a,a^\vee}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 18.6. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Schriftliche Prüfungen: Die Anmeldungen erfolgen wie im letzten Semester über das Studierendenportal. Die Anmeldefrist für die am 18.7. stattfindende erste Klausur läuft vom 8.6.–4.7., eine Abmeldung ist bis zum 11.7. möglich.

Alle Prüflinge müssen sich fristgerecht anmelden. Nachträgliche Anmeldungen sind ausgeschlossen. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllen, gelten als abgemeldet. Insbesondere Wiederholer, die in der Vergangenheit die Zulassungsvoraussetzung erreicht haben, müssen sicherstellen, dass in unseren Teilnehmerlisten die Anmeldung sowie Erfüllung der Zulassungsvoraussetzungen vermerkt wurden.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die hermitesche Form $\Phi(x, y) = {}^t x A \bar{y}$ zur hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & i \\ -i & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

nichtentartet? Bestimmen Sie dafür die Signatur (p, q) in Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Zwei hermitesche Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ nennt man kongruent, wenn $A' = {}^t S A \bar{S}$ für ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Teilmenge aller hermiteschen Matrizen.

(i) Verifizieren Sie, dass V ein reeller Untervektorraum, jedoch für $n \geq 1$ kein komplexer Untervektorraum ist.

(ii) Berechnen Sie die Dimension des reellen Vektorraumes V.

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Kongruenzklassen von Hermiteschen Matrizen $A \in V$, und prüfen Sie ihre Antwort in den Spezialfällen $n = 0, 1$. (Tipp: Sylvesters Trägheitssatz, zusammen mit Blatt 10, Aufgabe 3.)

Aufgabe 3. (i) Verifizieren Sie, dass jedes $S \in \mathrm{SO}(n)$ als Produkt von einer geraden Zahl von orthogonalen Spiegelungen geschrieben werden kann.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes $S \in \mathrm{O}(2)$ ein Produkt von höchstens zwei orthogonalen Spiegelungen ist.

(iii) Folgern Sie, dass jedes $S \in \mathrm{SO}(3)$ als Produkt von zwei orthogonalen Spiegelungen schreibbar ist.

(iv) Deduzieren Sie, dass jedes $S \in \mathrm{SO}(3)$ einen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt, also eine "Rotationsachse" hat.

Aufgabe 4. Schreiben Sie den Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad S \longmapsto (A \mapsto SAS^{-1}),$$

welcher durch die Konjugation auf dem 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum der spurlosen antihermiteschen 2×2-Matrizen gegeben ist, in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} x+iy & -r+is \\ r+is & x-iy \end{pmatrix} \longmapsto \big(a_{ij}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3},$$

mit Matrizeneinträgen $a_{ij} = a_{ij}(x,y,r,s) \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25.6. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 1. Seien V, W zwei K-Vektorräume und $a \in V$, $b \in W$ Vektoren mit $a \otimes b = 0$ im Tensorprodukt $V \otimes W$. Folgern Sie, dass dann $a = 0$ oder $b = 0$ gelten muss.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die kanonische lineare Abbildung

$$V^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{End}_K(V), \quad h \otimes a \longmapsto (x \mapsto h(x)a)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3. Wie lautet die Jordan-Normalform für das Kronecker-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

aufgefasst als Endomorphismus von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \simeq \mathbb{Q}^4$?

Aufgabe 4. Seien $f : V \to V$ und $g : W \to W$ zwei trigonalisierbare Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f(T) = \prod_{i=1}^{m}(T - \lambda_i) \quad \text{und} \quad \chi_g(T) = \prod_{j=1}^{n}(T - \mu_j).$$

Beweisen Sie, dass der induzierte Endomorphismus

$$f \otimes g : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$

das charakteristische Polynom

$$\chi_{f \otimes g}(T) = \prod_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} (T - \lambda_i \mu_j)$$

hat.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 2.7. um 8:25 Uhr im Zettelkasten. Dieses ist das letzte Blatt für die Wertung zur Klausurzulassung.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 15

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, und $f^* : V^* \to U^*$ die duale Abbildung. Verifizieren Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) f ist injektiv genau dann, wenn f^* surjektiv ist.

(ii) f ist surjektiv genau dann, wenn f^* injektiv ist.

Aufgabe 2. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraumes, und $f^* : V \to V$ seine adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass f normal ist genau dann, wenn $f^* = P(f)$ für ein Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ gilt.

Aufgabe 3. Wie lautet die Jordan-Normalform für das Kronecker-Produkt $J_2(1) \otimes J_2(1) \in \mathrm{Mat}_3(K)$? Hierbei ist

$$J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K).$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \neq 2, 3$ und $A \in \mathrm{Mat}_6(K)$ mit

$$\chi_A(T) = (T-1)(T+2)^2(T+1)^3 \quad \text{und} \quad \mu_A(T) = (T-1)(T+2)(T+1)^2.$$

Wie lautet die Jordan-Normalform für A? Was lässt sich in den Fällen $p = 2$ oder $p = 3$ sagen?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 9.7. um 8:25 Uhr im Zettelkasten. Dieses Blatt wird nicht mehr von den Hilfskräften korrigiert, aber in den Übungsgruppen besprochen.