Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Nutzen Sie die Eigenschaft

$$x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \ldots = x_r = 0$$

der rellen Zahlen aus, um zu zeigen, dass jede algebraische Menge $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ von der Form $X = V(f)$ für ein einziges Polynom $f \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$ ist.

Aufgabe 2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und

$$X = V(f) \quad \text{and} \quad Y = V(g)$$

zwei Hyperflächen im $\mathbb{A}^n(k)$, gegeben durch zwei Polynome $f, g \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Angenommen, es gilt $X \subset Y$, und das Polynom f ist irreduzibel. Folgern Sie mit dem Hilbertschen Nullstellensatz, dass f ein Teiler von g ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, und $\sqrt{\mathfrak{a}}$ sein Radikal. Zeigen Sie mit dem Hilbertschen Basissatz, dass es eine natürliche Zahl $m \geq 0$ gibt so, dass für jedes Polynom $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ gilt:

$$f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \quad \Longleftrightarrow \quad f^m \in \mathfrak{a}.$$

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, und $f_1, \ldots, f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome, welche nicht das Einsideal erzeugen. Zeigen Sie mit dem Hilbertschen Nullstellensatz, dass es eine endliche Körpererweiterung $k \subset k'$ gibt so, dass die algebraische Menge

$$X = V(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{A}^n(k')$$

nichtleer ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 4. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.