Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Wir betrachten die komplexe Quadrik

$$X = V_+(T_0^2 + T_1^2 + T_2^2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

und die Abbildung

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 + x_1^2 : x_1^2 + x_2^2),$$

welche offenbar nicht für alle Argumente definiert ist. Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ der Wert $f(x) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ wohldefiniert ist. Folgern Sie daraus, dass die Einschränkung

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

überall definiert ist, und bestimmen Sie für alle $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die Urbildmenge $f^{-1}(y) \subset X$.

Aufgabe 2. Seien $X \subset \mathbb{P}^m(k)$ und $Y \subset \mathbb{P}^n(k)$ zwei algebraische Mengen. Benutzen Sie Veronese- und Segre-Einbettungen, um die disjunkte Vereinigung $X \dot\cup Y$ als algebraische Menge in einem $\mathbb{P}^r(k)$ für ein geeignetes $r \geq 0$ zu realisieren.

Aufgabe 3. Sei $X \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine beliebige algebraische Menge. Zeigen Sie, dass unter einer geeigneten Veronese-Einbettung in einen $\mathbb{P}^r(k)$ diese algebraische Menge als Durchschnitt

$$X = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_+(f_\lambda)$$

von Quadriken geschrieben werden kann, die $f_\lambda \in k[T_0, \ldots, T_r]$ also homogene quadratische Polynome sind.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper der Charakteristik $p \neq 2$, und E ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Wir fassen die Grassmann-Varietät $\mathrm{Grass}^2(E)$ vermöge der Plücker-Einbettung als algebraische Menge im $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ auf. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$\mathrm{Grass}^2(E) = \{L \subset \Lambda^2 E \mid \; L = k\omega \text{ mit } \omega \neq 0 \text{ und } \omega \wedge \omega = 0\}$$

gilt. Folgern Sie, dass $\mathrm{Grass}^2(E) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ als Durchschnitt von Quadriken geschrieben werden kann.

Abgabe: Bis Freitag, den 18. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.