Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist X irreduzibel und $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, so ist auch Y irreduzibel.

(ii) Jeder irreduzible Raum X ist zusammenhängend.

(iii) Jeder Hausdorff-Raum X ist sober.

(iv) Ist X sober, so ist X auch kolmogoroffsch: zu je zwei Punkten $a \neq b$ aus X gibt es eine offene Menge, die einen der beiden aber nicht den anderen enthält.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie über dem nicht-algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \mathbb{R}$ ein Primideal $\mathfrak{p} \subset k[T_0, T_1]$, dessen Verschwindungsmenge

$$X = V(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{A}^2(k)$$

nichtleer aber reduzibel ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum, und

$$X^{\text{sob}} = \{\eta_A \mid A \subset X \text{ abgeschlossen und irreduzibel}\}$$

seine Sobrifizierung. Zeigen Sie im Detail, dass die Mengen

$$\tilde{U} = \{\eta_A \mid A \cap U \neq \emptyset\}, \quad U \subset X \text{ offen}$$

eine Topologie auf X^{sob} bilden, und dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ in einen sobren Raum Y eindeutig über die stetige Abbildung

$$q : X \longrightarrow X^{\text{sob}}, \quad x \longmapsto \eta_A$$

faktorisiert, wobei $A = \overline{\{x\}}$ der Abschluss des Punktes $x \in X$ ist.

Aufgabe 4. Der *duale Graph* zu einem noetherschen Raum X ist der endliche Graph Γ, dessen Ecken $v_i \in \Gamma$ den irreduziblen Komponenten $X_i \subset X$ entsprechen. Dabei werden zwei Ecken $v_i \neq v_j$ mit einer Kante verbunden, wenn $X_i \cap X_j$ nichtleer ist.

(i) Zeichen Sie den dualen Graphen Γ für die ebene algebraische Kurve

$$X = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad f = T_0 T_1^5 - T_0 T_2^5.$$

(ii) Zeigen Sie, dass der noethersche Raum X zusammenhängend ist genau dann, wenn der duale Graph Γ zusammenhängend ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 2. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.