Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Resultante $\operatorname{res}(f, g)$ für quadratische Polynome
$$f(T) = aT^2 + bT + c \quad \text{und} \quad g(T) = a'T^2 + b'T + c'.$$

Aufgabe 2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ eine irreduzible Kurve, und $J \subset k[x, y]$ das Tjurina-Ideal. Zeigen Sie, dass der Restklassenring
$$A = k[x, y]/J$$
als k-Vektorraum endlich-dimensional ist. Die Zahl $\tau = \dim_k(A)$ heißt die *Tjurina-Zahl* der Kurve.

Aufgabe 3. Seiein $m, n \geq 1$ zwei natürliche Zahlen und
$$f(x, y) = x^m - y^n \in \mathbb{C}[x, y].$$
Bestimmen Sie für die Kurve $C = V(f)$ im $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ die irreduziblen Komponenten $C_i \subset C$, den resultierenden dualen Graph Γ, den singulären Ort $S \subset C$ sowie die Tjurina-Zahl $\tau \geq 0$.

Aufgabe 4. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ eine ebene affine Kurve, und $C = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subset C$ offen ist genau dann, wenn gilt:
$$U \cap C_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad C_i \smallsetminus U \text{ ist endlich.}$$
Skizzieren Sie die Sobrifikation C^{sob}, nicht als reelles Bild, sondern so, wie die Zariski-Toplogie tatsächlich beschaffen ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 9. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.