Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $F \in k[[x,y]]$ eine formale Potenzreihe mit $F(0,y) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Zerlegung $F = uG$ aus dem Vorbereitungssatz in ein Weierstraß-Polynom G und eine Einheit u eindeutig ist.

Aufgabe 2. Sei $R = k[[T_1, T_2]]$ der Ring der formalen Potenzreihen.

(i) Verifizieren Sie, dass eine formale Potenzreihen $f \in R$ genau dann eine Einheit ist, wenn der konstanten Term $\lambda = f(0,0)$ eine Einheit ist.

(ii) Folgern Sie, dass der Ring R lokal ist, also nur ein einziges maximales Ideal $\mathfrak{m}_R \subset R$ besitzt.

(iii) Seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_R$. Beweisen Sie, dass der induzierte Homomorphismus von Ringen $R \to R$, $T_i \mapsto f_i$ genau dann bijektiv ist, wenn die Jacobi-Matrix

$$J = (\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(0,0)) \in \mathrm{Mat}_2(k)$$

invertierbar ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und $f \in k[[T]]$ eine formale Potenzreihe, mit konstantem Term $\lambda \in k^\times$. Zeigen Sie, dass $f \in k[[T]]^\times$ ein Quadrat ist genau dann, wenn $\lambda \in k^\times$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 4. Sei $R = k[x,y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten und $f \in R$ ein Polynom. Wir schreiben $\hat{R} = k[[x,y]]$ für den Ring der formalen Potenzreihen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $f \in \hat{R}$ prim, so ist auch $f \in R$ prim.

(ii) Ist $f \in R$ prim, so ist auch $f \in \hat{R}$ prim.

Abgabe: Bis Freitag, den 20. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.