Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ die Kleinsche Quartik, gegeben durch die homogene Gleichung

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Kurve X glatt ist.

(ii) Sei $\gamma \in \mathbb{C}^\times$ eine primitive siebte Einheitswurzel, und

$$A = \gamma^1 - \gamma^{-1}, \quad B = \gamma^2 - \gamma^{-2}, \quad \text{und} \quad C = \gamma^4 - \gamma^{-4}.$$

Rechnen Sie nach, dass $(A : B : C) \in X$ gilt.

Aufgabe 2. Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, und $G \subset \mathrm{Aut}(C)$ eine Untergruppe von Ordnung $d = \mathrm{ord}(G)$. Angenommen, der Morphismus

$$f : C \longrightarrow D = C/G$$

hat genau vier kritische Werte $y_1, \ldots, y_4 \in D$, wobei $g(D) = 0$. Zeigen Sie vermöge der Riemann–Hurwitz-Formel

$$2g - 2 = d(-2 + \sum_{i=1}^{4}(1 - \frac{1}{e_i})),$$

dass dann $d \leqslant 6(g-1)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass es keine Kurve C vom Geschlecht $g = 2$ gibt, dessen Automorphismengruppe $G = \mathrm{Aut}(C)$ die nach der Hurwitz-Schranke maximale Ordnung $84 = 84(g-1)$ annimmt.

Aufgabe 4. Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, und $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ ein Element, dessen Ordnung eine Primzahl $p > 0$ ist. Beweisen Sie, dass dann

$$p \leqslant g \quad \text{oder} \quad p = g + 1 \quad \text{oder} \quad p = 2g + 1$$

gelten muss.

Abgabe: Bis Freitag, den 3. Februar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.