Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

# Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

## Blatt 1

**Aufgabe 1.** Sei $R$ ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $x \in \operatorname{Spec}(R)$ der entsprechende Punkt. Verifizieren Sie, dass es einen Körper $K$ und einen Homomorphismus $\varphi : R \to K$ gibt so, dass das Bild der induzierten Abbildung

$$f : \operatorname{Spec}(K) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$$

aus dem Punkt $x \in \operatorname{Spec}(R)$ besteht.

**Aufgabe 2.** Beschreiben und skizzieren Sie die stetige Abbildung

$$f : \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[T]),$$

welche durch die kanonische Inklusion $\mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ induziert wird, indem Sie Bilder und Urbilder angeben.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jeder quasikompakte Kolmogoroff-Raum $X \neq \emptyset$ einen abgeschlossenen Punkt $a \in X$ enthält. Geben Sie weiterhin ein Beispiel für einen Kolmogoroff-Raum $Y \neq \emptyset$ an, der keinen abgeschlossenen Punkt besitzt.

**Aufgabe 4.** Sei $R$ ein Ring und $R_\lambda \subset R$, $\lambda \in L$ eine Familie von Unterringen mit $R = \bigcup R_\lambda$. Diese Familie sei *filtriert*, das heißt zu je zwei Indices $\alpha, \beta \in L$ gebe es einen weiteren Index $\lambda \in L$ mit $R_\alpha, R_\beta \subset R_\lambda$. Setze $X = \operatorname{Spec}(R)$ und $X_\lambda = \operatorname{Spec}(R_\lambda)$. Beweisen Sie, dass die resultierende Abbildung

$$X \longrightarrow \varprojlim(X_\lambda)$$

ein Homöomorphismus ist. Hierbei ist der *inverese Limes*

$$\varprojlim_{\lambda \in L}(X_\lambda) \subset \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

der Unterraum aller Tupel $(x_\lambda)$, welche $x_\lambda \mapsto x_\mu$ für alle Inklusionen $R_\mu \subset R_\lambda$ erfüllen.

**Abgabe:** Bis Freitag, den 28. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

**Zulassungsvoraussetzung zur mündlichen Prüfung:** 40% = 88 Punkte der insgesamt 220 = 11 x 4 x 5 Punkte auf den elf Übungsblätter.