Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subset R$ Ideale. Zeigen Sie durch Induktion nach $n \geq 2$, dass die Diagonalabbildung

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_n, \quad x \longmapsto (x \bmod \mathfrak{a}_1, \ldots, x \bmod \mathfrak{a}_n)$$

surjektiv ist genau dann, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ paarweise koprim sind.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$ sein Spektrum. Die Menge

$$\operatorname{OpCl}(X) = \{U \subset X \mid U \text{ ist offen und abgeschlossen}\}$$

ist mit den drei Operationen

$$U \longmapsto X \smallsetminus U, \quad (U,V) \longmapsto U \cup V \quad \text{und} \quad (U,V) \longmapsto U \cap V$$

sowie der Inkusionsrelation $U \subset V$ ausgestattet. Wie sehen diese auf der Menge $\operatorname{Idem}(R)$ aller idempotenten Element $e \in R$ aus?

Aufgabe 3. Sei k ein Körper, $A \in \operatorname{Mat}_n(k)$ eine Matrix und $R \subset \operatorname{Mat}_n(k)$ die davon erzeugte Unteralgebra. Beschreiben Sie den topologischen Raum

$$X = \operatorname{Spec}(R)$$

und die Restekörper $\kappa(x) = \kappa(\mathfrak{p})$. Wie hängt dies mit den Eigenwerten λ der Matrix zusammen, die im Grundkörper k oder dem algebraischen Abschluss $\bar{k}$ liegen?

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, $X = \mathrm{Spec}(R)$ sein Spektrum, $x \in X$ ein Punkt und $\mathfrak{p} \subset R$ das entsprechende Primideal. Sei $\mathfrak{a} \subset R$ das Ideal, welches von den in $\mathfrak{p}$ enthaltenen Idempotenten $e \in R$ erzeugt wird, und $Z = V(\mathfrak{a})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Teilmenge $Z \subset X$ ist der Durchschnitt aller Umgebungen von $x \in X$, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

(ii) Der Raum Z ist zusammenhängend.

(iii) Die abgeschlossene Menge Z ist die Zusammenhangskomponente des Punktes $x \in X$.

Abgabe: Bis Freitag, den 5. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.