Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, dass im Jacobsen-Radikal $\operatorname{Rad}(R)$ enthalten ist. Sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, und $\bar{\varphi} : \bar{M} \to \bar{N}$ die auf $\bar{M} = M/\mathfrak{a}M$ und $\bar{N} = N/\mathfrak{a}N$ die induzierte Abbildung. Angenommen, N ist endlich erzeugt. Folgern Sie

$$\bar{\varphi} : \bar{M} \to \bar{N} \text{ surjektiv} \quad \Longrightarrow \quad \varphi : M \to N \text{ surjektiv}$$

aus dem Nakayama-Lemma.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, das im Jacobson-Radikal $\operatorname{Rad}(R)$ enthalten ist, und M ein R-Modul mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}M = M$. Nach dem Nakayama-Lemma muss also $M = 0$, falls M endlich erzeugt ist.

(i) Geben Sie ein Beispiel mit $M \neq 0$, wobei M nicht endlich erzeugt ist.

(ii) Beweisen Sie, dass trotzdem $M = 0$ gilt, sofern $\mathfrak{a}$ nilpotent ist, also $\mathfrak{a}^n = 0$ für ein $n \geq 0$.

Aufgabe 3. Sei R ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul, also ein direkter Summand eines freien Moduls $R^{\oplus n}$, $n \geq 0$. Zeigen Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass dann M bereits frei sein muss.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass ein Ring R bereits noethersch ist, sofern jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ endlich erzeugt ist. Tipp: Betrachten Sie die geordnete Menge aller Ideale, die nicht endlich erzeugt sind, sowie geeignete Summen- und Colonideale

$$\mathfrak{p} + (f) = \{a + bf \mid a \in \mathfrak{p}, b \in R\}, \qquad (\mathfrak{p} : f) = \{a \in R \mid af \in \mathfrak{p}\}.$$

Abgabe: Bis Freitag, den 19. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.