Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $R \neq 0$ ein Ring, T eine Unbestimmte und $A = R[T]$ der Polynomring. Seien $U = V = \mathbb{A}^1_R = \operatorname{Spec}(A)$ zwei Kopien der affinen Gerade. Wir bilden das Schema

$$X = U \cup V$$

durch Verkleben vermöge der Identität $\mathrm{id} : U_T \to V_T$. Berechnen Sie den Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ und deduzieren Sie, dass das Schema X nicht affin ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ die projektive Gerade über dem Grundkörper $\mathbb{C}$. Wir statten die Menge der $\mathbb{C}$-wertigen Punkte $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit der klassischen Topologie sowie den Strukturgarben $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ der differenzierbaren bzw. stetigen Funktionen aus. Konstruieren Sie kanonische Morphismen von lokal-geringten Räumen

$$(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{C}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{C}^\infty_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}).$$

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und X ein affines Schema. Angenommen, der Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra. Zeigen sie, dass

$$X(\bar{k}) = \bigcup_{\lambda \in L} X(k_\lambda),$$

wobei $\bar{k}$ der algebraische Abschluss und k_λ, $\lambda \in L$ die Familie der Zwischenkörper $k \subset k_\lambda \subset \bar{k}$ mit $[k_\lambda : k] < \infty$ ist.

Aufgabe 4. Sei X ein Schema. Angenommen, es gibt eine affine offenen Überdeckung

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

so, dass die Ringe $R_i = \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ der lokalen Schnitte noethersch sind. Beweisen Sie, dass dann sogar für jede affine offene Teilmenge $V \subset X$ der Ring $A = \Gamma(V, \mathscr{O}_X)$ noethersch ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 23. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.