Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $A = \mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von $R = \mathbb{Z}$ am Primideal $\mathfrak{p} = (p)$. Konstruieren Sie einen nicht-flachen R-Modul M, für den $M \otimes_R A$ ein treu-flacher A-Modul wird.

Aufgabe 2. Wir betrachten Moduln über dem lokalen Ring $R = k[T]/(T^n)$, wobei k ein Körper und $n \geq 1$.

(i) Verifizieren Sie, dass die R-Moduln M den Paaren (V, φ) entsprechen, wobei V ein k-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit $\varphi^n = 0$ ist.

(ii) Beschreiben Sie das Tensorprodukt $R/\mathfrak{m}_R \otimes_R M$ durch den Endomorphismus φ.

(iii) Beschreiben Sie die endlich-erzeugten flachen R-Moduln M durch die Jordan-Normalform von φ, indem Sie das Ideal $\mathfrak{a} = (T^{n-1})$ betrachten.

Aufgabe 3. Sei $R \subset A$ eine treu-flache Ringerweiterung und E eine R-Modul. Angenommen, der resultierende A-Modul $M \otimes A$ ist von endlicher Präsentation oder flach. Zeigen Sie, dass die entsprechende Eigenschaft bereits für den R-Modul E gilt.

Aufgabe 4. Sei $R \subset A$ eine treu-flache Ringerweiterung von Integritätsringen. Zeigen Sie, dass die Inklusion

$$R \subset A \cap \mathrm{Frac}(R)$$

von Teilmengen in $\mathrm{Frac}(A)$ eine Gleichheit ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 30. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.