Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei R ein integrer Ring, $F = \mathrm{Frac}(R)$ sein Körper der Brüche, und $F \subset E$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass es eine endliche R-Algebra $A \subset E$ mit $\mathrm{Frac}(A) = E$ gibt.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, M ein endlich präsentierter R-Modul und N ein beliebiger R-Modul. Zeigen Sie, dass die Bildung des Hom-Moduls

$$\mathrm{Hom}_R(M, N)$$

mit Lokalisierung vertauscht, indem Sie den Spezialfall $M = R^n$ betrachten.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring und $R \subset A$ eine endliche birationale Ringerweiterung. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & A/\mathfrak{c} \\ R \arrow[u] \arrow[r] & R/\mathfrak{c}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

wobei $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(A/R)$ das Führerideal ist.

(i) Verifizieren Sie, dass das Führerideal $\mathfrak{c}$ das grösste Ideal in R ist, dass zugleich Ideal in A ist.

(ii) Zeigen Sie, dass obiges Diagramm cartesisch ist, also

$$R = \{(a, \bar{f}) \mid a \in A,\ \bar{f} \in R/\mathfrak{c}, \text{ und in } A/\mathfrak{c} \text{ gilt } a \bmod \mathfrak{c} = \bar{f}\}.$$

Aufgabe 4. Sei R ein integrer Ring und $F = \mathrm{Frac}(R)$ der Körper seiner Brüche. Angenommen, für jedes $a \in F^\times$ gilt $a \in R$ oder $a^{-1} \in R$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) R ist normal.

(ii) R ist lokal.

(iii) R ist ein diskreter Bewertungsring, falls R ein noetherscher Ring aber kein Körper ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 14. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.