Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $x \in \operatorname{Spec}(R)$ der entsprechende Punkt. Verifizieren Sie, dass es einen Körper K und einen Homomorphismus $\varphi : R \to K$ gibt so, dass das Bild der induzierten Abbildung

$$f : \operatorname{Spec}(K) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$$

aus dem Punkt $x \in \operatorname{Spec}(R)$ besteht.

Aufgabe 2. Beschreiben und skizzieren Sie die stetige Abbildung

$$f : \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[T]),$$

welche durch die kanonische Inklusion $\mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ induziert wird, indem Sie Bilder und Urbilder angeben.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jeder quasikompakte Kolmogoroff-Raum $X \neq \emptyset$ einen abgeschlossenen Punkt $a \in X$ enthält. Geben Sie weiterhin ein Beispiel für einen Kolmogoroff-Raum $Y \neq \emptyset$ an, der keinen abgeschlossenen Punkt besitzt.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $R_\lambda \subset R$, $\lambda \in L$ eine Familie von Unterringen mit $R = \bigcup R_\lambda$. Diese Familie sei *filtriert*, das heißt zu je zwei Indices $\alpha, \beta \in L$ gebe es einen weiteren Index $\lambda \in L$ mit $R_\alpha, R_\beta \subset R_\lambda$. Setze $X = \operatorname{Spec}(R)$ und $X_\lambda = \operatorname{Spec}(R_\lambda)$. Beweisen Sie, dass die resultierende Abbildung

$$X \longrightarrow \varprojlim(X_\lambda)$$

ein Homöomorphismus ist. Hierbei ist der *inverese Limes*

$$\varprojlim_{\lambda \in L}(X_\lambda) \subset \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$$

der Unterraum aller Tupel (x_λ), welche $x_\lambda \mapsto x_\mu$ für alle Inklusionen $R_\mu \subset R_\lambda$ erfüllen.

Abgabe: Bis Freitag, den 28. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Zulassungsvoraussetzung zur mündlichen Prüfung: 40% = 88 Punkte der insgesamt 220 = 11 x 4 x 5 Punkte auf den elf Übungsblätter.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subset R$ Ideale. Zeigen Sie durch Induktion nach $n \geq 2$, dass die Diagonalabbildung

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_n, \quad x \longmapsto (x \bmod \mathfrak{a}_1, \ldots, x \bmod \mathfrak{a}_n)$$

surjektiv ist genau dann, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ paarweise koprim sind.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$ sein Spektrum. Die Menge

$$\operatorname{OpCl}(X) = \{U \subset X \mid U \text{ ist offen und abgeschlossen}\}$$

ist mit den drei Operationen

$$U \longmapsto X \smallsetminus U, \quad (U,V) \longmapsto U \cup V \quad \text{und} \quad (U,V) \longmapsto U \cap V$$

sowie der Inkusionsrelation $U \subset V$ ausgestattet. Wie sehen diese auf der Menge $\operatorname{Idem}(R)$ aller idempotenten Element $e \in R$ aus?

Aufgabe 3. Sei k ein Körper, $A \in \operatorname{Mat}_n(k)$ eine Matrix und $R \subset \operatorname{Mat}_n(k)$ die davon erzeugte Unteralgebra. Beschreiben Sie den topologischen Raum

$$X = \operatorname{Spec}(R)$$

und die Restekörper $\kappa(x) = \kappa(\mathfrak{p})$. Wie hängt dies mit den Eigenwerten λ der Matrix zusammen, die im Grundkörper k oder dem algebraischen Abschluss $\bar{k}$ liegen?

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, $X = \mathrm{Spec}(R)$ sein Spektrum, $x \in X$ ein Punkt und $\mathfrak{p} \subset R$ das entsprechende Primideal. Sei $\mathfrak{a} \subset R$ das Ideal, welches von den in $\mathfrak{p}$ enthaltenen Idempotenten $e \in R$ erzeugt wird, und $Z = V(\mathfrak{a})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Teilmenge $Z \subset X$ ist der Durchschnitt aller Umgebungen von $x \in X$, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

(ii) Der Raum Z ist zusammenhängend.

(iii) Die abgeschlossene Menge Z ist die Zusammenhangskomponente des Punktes $x \in X$.

Abgabe: Bis Freitag, den 5. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale.

(i) Verifizieren Sie die Gleichheit sowie die Inklusion

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \supset \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

(ii) Geben Sie mit $R = k[x, y]$ ein Beispiel dafür an, dass im allgemeinen

$$\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \neq \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

Aufgabe 2. Sei $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus von Ringen,

$$f : X = \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R) = Y$$

die induzierte stetige Abbildung, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $Z = V(\mathfrak{a})$ die resultierende abgeschlossene Menge in X.

(i) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Bildmenge $f(Z) \subset Y$ im allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

(ii) Was ist das Radikalideal $\mathfrak{b} \subset R$ zur abgeschlossenen Menge $\overline{f(Z)} \subset Y$?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \operatorname{Gal}(L/K)$. Schreiben Sie den Ring $R = L \otimes_K L$ als Produkt von Körpern und zeigen Sie, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ ein Radikalideal ist. Benutzen Sie dabei, dass für gewisse $a \in L$ die konjugierten Elemente $\sigma(a) \in L$ eine K-Basis bilden.

Aufgabe 4. Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit und $R = \mathscr{C}(X)$ der Ring der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass X in kanonischer Weise als Unterraum aller abgeschlossenen Punkte von $Y = \operatorname{Spec}(R)$ aufgefasst werden kann.

(ii) Folgern Sie, dass zwei kompakte Mannigfaltigkeiten X und X' homöomorph sind genau dann, wenn die Ringe $R = \mathscr{C}(X)$ und $R' = \mathscr{C}(X')$ isomorph sind.

Abgabe: Bis Freitag, den 12. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, dass im Jacobsen-Radikal $\mathrm{Rad}(R)$ enthalten ist. Sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, und $\bar{\varphi} : \bar{M} \to \bar{N}$ die auf $\bar{M} = M/\mathfrak{a}M$ und $\bar{N} = N/\mathfrak{a}N$ die induzierte Abbildung. Angenommen, N ist endlich erzeugt. Folgern Sie

$$\bar{\varphi} : \bar{M} \to \bar{N} \text{ surjektiv} \quad \Longrightarrow \quad \varphi : M \to N \text{ surjektiv}$$

aus dem Nakayama-Lemma.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, das im Jacobson-Radikal $\mathrm{Rad}(R)$ enthalten ist, und M ein R-Modul mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}M = M$. Nach dem Nakayama-Lemma muss also $M = 0$, falls M endlich erzeugt ist.

(i) Geben Sie ein Beispiel mit $M \neq 0$, wobei M nicht endlich erzeugt ist.

(ii) Beweisen Sie, dass trotzdem $M = 0$ gilt, sofern $\mathfrak{a}$ nilpotent ist, also $\mathfrak{a}^n = 0$ für ein $n \geq 0$.

Aufgabe 3. Sei R ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul, also ein direkter Summand eines freien Moduls $R^{\oplus n}$, $n \geq 0$. Zeigen Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass dann M bereits frei sein muss.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass ein Ring R bereits noethersch ist, sofern jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ endlich erzeugt ist. Tipp: Betrachten Sie die geordnete Menge aller Ideale, die nicht endlich erzeugt sind, sowie geeignete Summen- und Colonideale

$$\mathfrak{p} + (f) = \{a + bf \mid a \in \mathfrak{p}, b \in R\}, \qquad (\mathfrak{p} : f) = \{a \in R \mid af \in \mathfrak{p}\}.$$

Abgabe: Bis Freitag, den 19. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $R \subset A$ eine Ringerweiterung, wobei der R-Modul A frei ist.

(i) Angenommen, der Ring A ist artinsch oder noethersch. Verifizieren Sie, dass der Unterring R die gleiche Eigenschaft hat.

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass (i) im Allgemeinen falsch ist, falls keine Annahme an den R-Modul A gemacht wird.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{b} \subset R$ ein Ideal, und $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ das zugehörige Radikalideal. Verifizieren Sie, dass $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{b}$ für ein gewisses $n \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring, M ein endlich-erzeugter R-Modul und $f \in R$ ein Skalar. Zeigen Sie, dass die Homothetie

$$M \longrightarrow M, \quad a \longmapsto fa$$

injektiv ist genau dann, wenn f nicht in der Vereinigung der assozierten Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ liegt.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper, T eine Unbestimmte, und

$$R = \bigcup_{n \geq 1} k[[T^{1/n}]]$$

der Ring der formalen Puiseux-Reihen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Spektrum $X = \operatorname{Spec}(R)$ ist der Sierpinski-Raum $X = \{\sigma, \eta\}$.

(ii) Der Ring R ist lokal aber nicht-noethersch.

(iii) Der Restekörper $k = R/\mathfrak{m}_R$ ist als R-Modul nicht von endlicher Präsentation.

Abgabe: Bis Freitag, den 26. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, $S \subset R$ ein multiplikatives System und M ein R-Modul. Verifizieren Sie, dass die Relation

$$(s, a) \sim (s', a') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in R \text{ mit } t(sa' - s'a) = 0$$

auf der Menge $S \times M$ eine Äquivalenzrelation ist, und dass Addition und Skalarmultiplikation

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{s} = \frac{sa + rb}{rs}, \qquad f \cdot \frac{b}{s} = \frac{fb}{s}$$

auf der Lokalisierung $S^{-1}M$ wohldefiniert sind.

Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen. Wir betrachten die zyklische Gruppe

$$M = \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$$

als R-Modul. Berechnen Sie die Lokalisierung M_f für die beiden ganzen Zahlen $f = 2$ und $f = 5$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $f \in R$. Zeigen Sie, dass die R-Algebra R_f isomorph zu $R[T]/(fT - 1)$ ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Wir bilden die Familie $\mathfrak{p}_\lambda \subset R$, $\lambda \in L$ der zu S disjunkten Primideale, und setzen $\tilde{S} = R \smallsetminus \bigcup \mathfrak{p}_\lambda$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Teilmenge $\tilde{S} \subset R$ ist ein multiplikatives System, welches S enthält.

(ii) Ist $a \in R$ Teiler eines Elements $s \in \tilde{S}$, so folgt bereits $a \in \tilde{S}$.

(iii) Die kanonische Abbildung

$$S^{-1}R \longrightarrow \tilde{S}^{-1}R, \quad \frac{f}{s} \longmapsto \frac{f}{s}$$

ist bijektiv.

Abgabe: Bis Freitag, den 2. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut SS 17
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Wir definieren eine Prägarbe $f_*(\mathscr{F})$ auf Y durch

$$\Gamma(V, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{F})$$

sowie den Restriktionsabbildungen

$$\mathrm{res}_U^V = \mathrm{res}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}.$$

Verifizieren Sie, dass es sich bei diese Prägarbe um eine Garbe handelt (die sogenannte *direkte Bildgarbe*), und berechnen Sie die Halme $f_*(\mathscr{F})_y$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, $V \subset X$ eine offene Teilmenge, und $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf V. Es bezeichen $i : V \to X$ die Inklusionsabbildung. Wir definieren eine abelsche Prägarbe $i_!(\mathscr{F})$ auf X durch

$$\Gamma(U, i_!(\mathscr{F})) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathscr{F}) & \text{wenn } U \subset V; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Verifizieren Sie, dass diese Prägarbe eine Garbe ist (die sogenannte *Fortsetzung durch Null*), und berechnen Sie die Halme $i_!(\mathscr{F})_x$.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Wir definieren eine abelsche Prägarbe durch

$$\Gamma(U, \mathscr{F}) = \begin{cases} G & \text{wenn } U \text{ nichtleer;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter welchen Voraussetzungen an X und G handelt es sich um eine Garbe?

Aufgabe 4. (i) Sei R ein Ring, N ein R-Modul, und $M, M' \subset N$ zwei Untermoduln. Zeigen Sie, dass die Inklusion $M \subset M'$ als Untermoduln von N genau dann gilt, wenn

$$M_{\mathfrak{p}} \subset M'_{\mathfrak{p}} \quad \text{als Untermoduln von } N_{\mathfrak{p}}$$

für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ der Fall ist.

(ii) Verallgemeinern Sie diese Aussage auf topologische Räume und abelsche Garben.

Abgabe: Bis Freitag, den 9. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei F ein Körper und $R \subset F$ ein lokaler Unterring. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung ein lokaler Homomorphismus ist genau dann, wenn der Ring R ein Körper ist.

Aufgabe 2. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$ das Spektrum eines lokalen Rings R. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) X ist nichtleer;

(ii) X ist irreduzibel;

(iii) X ist zusammenhängend;

(iv) X ist noethersch.

Aufgabe 3. Sei $R = k[T_1, T_2]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten über einem Körper k. Wir betrachten das affine Schema $(X, \mathscr{O}_X) = (\operatorname{Spec} R, \widetilde{R})$. Berechnen Sie mit dem Garbenaxiom für die offene Teilmenge

$$U = D(T_1) \cup D(T_2)$$

den Ring der lokalen Schnitte $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Folgern Sie daraus, dass das Schema $(U, \mathscr{O}_X|U)$ kein affines Schema ist.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein lokal-geringter Raum. Zeigen Sie, dass es genau einen Morphismus

$$(f, \varphi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{Z}})$$

in das affine Schema $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{Z}})$ gibt. Beschreiben Sie für jeden Punkt $x \in X$ das Bild $f(x) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ mittels einer Eigenschaft des Restekörpers $\kappa(x)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 16. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer
SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $R \neq 0$ ein Ring, T eine Unbestimmte und $A = R[T]$ der Polynomring. Seien $U = V = \mathbb{A}^1_R = \operatorname{Spec}(A)$ zwei Kopien der affinen Gerade. Wir bilden das Schema

$$X = U \cup V$$

durch Verkleben vermöge der Identität $\operatorname{id} : U_T \to V_T$. Berechnen Sie den Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ und deduzieren Sie, dass das Schema X nicht affin ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ die projektive Gerade über dem Grundkörper $\mathbb{C}$. Wir statten die Menge der $\mathbb{C}$-wertigen Punkte $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit der klassischen Topologie sowie den Strukturgarben $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ der differenzierbaren bzw. stetigen Funktionen aus. Konstruieren Sie kanonische Morphismen von lokal-geringten Räumen

$$(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{C}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathscr{C}^\infty_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}).$$

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und X ein affines Schema. Angenommen, der Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra. Zeigen sie, dass

$$X(\bar{k}) = \bigcup_{\lambda \in L} X(k_\lambda),$$

wobei $\bar{k}$ der algebraische Abschluss und k_λ, $\lambda \in L$ die Familie der Zwischenkörper $k \subset k_\lambda \subset \bar{k}$ mit $[k_\lambda : k] < \infty$ ist.

Aufgabe 4. Sei X ein Schema. Angenommen, es gibt eine affine offenen Überdeckung

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

so, dass die Ringe $R_i = \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ der lokalen Schnitte noethersch sind. Beweisen Sie, dass dann sogar für jede affine offene Teilmenge $V \subset X$ der Ring $A = \Gamma(V, \mathscr{O}_X)$ noethersch ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 23. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $A = \mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von $R = \mathbb{Z}$ am Primideal $\mathfrak{p} = (p)$. Konstruieren Sie einen nicht-flachen R-Modul M, für den $M \otimes_R A$ ein treu-flacher A-Modul wird.

Aufgabe 2. Wir betrachten Moduln über dem lokalen Ring $R = k[T]/(T^n)$, wobei k ein Körper und $n \geq 1$.

(i) Verifizieren Sie, dass die R-Moduln M den Paaren (V, φ) entsprechen, wobei V ein k-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit $\varphi^n = 0$ ist.

(ii) Beschreiben Sie das Tensorprodukt $R/\mathfrak{m}_R \otimes_R M$ durch den Endomorphismus φ.

(iii) Beschreiben Sie die endlich-erzeugten flachen R-Moduln M durch die Jordan-Normalform von φ, indem Sie das Ideal $\mathfrak{a} = (T^{n-1})$ betrachten.

Aufgabe 3. Sei $R \subset A$ eine treu-flache Ringerweiterung und E eine R-Modul. Angenommen, der resultierende A-Modul $M \otimes A$ ist von endlicher Präsentation oder flach. Zeigen Sie, dass die entsprechende Eigenschaft bereits für den R-Modul E gilt.

Aufgabe 4. Sei $R \subset A$ eine treu-flache Ringerweiterung von Integritätsringen. Zeigen Sie, dass die Inklusion

$$R \subset A \cap \operatorname{Frac}(R)$$

von Teilmengen in $\operatorname{Frac}(A)$ eine Gleichheit ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 30. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Verifizieren Sie explizit, dass Dedekind-Ringe R normal sind.

Aufgabe 2. Sei k ein Grundkörper, und $S \subset \mathbb{N}$ ein Untermonoid, der alle $n \geq n_0$ ab einer gewissen natürlichen Zahl n_0 enthalte. Berechnen Sie die Normalisierung des Monoidrings

$$R = k[S] = k[T^n \mid n \in S].$$

Aufgabe 3. Sei A eine R-Algebra, $R \subset R'$ eine treu-flache Ringerweiterung, und

$$A' = A \otimes_R R'$$

der resultierende Basiswechsel. Zeigen Sie, dass A ganz über R ist, falls A' ganz über R' ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper und T ein profiniter Raum, geschrieben als inverser Limes

$$T = \varprojlim_{\lambda \in L} T_\lambda$$

eines filtrierten inversen Systems von endlichen Mengen T_λ, $\lambda \in L$ mit diskreter Topologie. Zeigen Sie, dass T der zugrundeliegende topologische Raum eines affinen Schemas $X = \operatorname{Spec}(A)$ ist, indem Sie geeignete endliche k-Algebren A_λ konstruieren.

Abgabe: Bis Freitag, den 7. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei R ein integrer Ring, $F = \mathrm{Frac}(R)$ sein Körper der Brüche, und $F \subset E$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass es eine endliche R-Algebra $A \subset E$ mit $\mathrm{Frac}(A) = E$ gibt.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, M ein endlich präsentierter R-Modul und N ein beliebiger R-Modul. Zeigen Sie, dass die Bildung des Hom-Moduls

$$\mathrm{Hom}_R(M, N)$$

mit Lokalisierung vertauscht, indem Sie den Spezialfall $M = R^n$ betrachten.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring und $R \subset A$ eine endliche birationale Ringerweiterung. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/\mathfrak{c} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & R/\mathfrak{c}, \end{array}$$

wobei $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(A/R)$ das Führerideal ist.

(i) Verifizieren Sie, dass das Führerideal $\mathfrak{c}$ das grösste Ideal in R ist, dass zugleich Ideal in A ist.

(ii) Zeigen Sie, dass obiges Diagramm cartesisch ist, also

$$R = \{(a, \bar{f}) \mid a \in A,\ \bar{f} \in R/\mathfrak{c}, \text{ und in } A/\mathfrak{c} \text{ gilt } a \bmod \mathfrak{c} = \bar{f}\}.$$

Aufgabe 4. Sei R ein integrer Ring und $F = \mathrm{Frac}(R)$ der Körper seiner Brüche. Angenommen, für jedes $a \in F^\times$ gilt $a \in R$ oder $a^{-1} \in R$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) R ist normal.

(ii) R ist lokal.

(iii) R ist ein diskreter Bewertungsring, falls R ein noetherscher Ring aber kein Körper ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 14. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 13

Aufgabe 1. Welche Klasse von Idealen $\mathfrak{a} \subsetneq R$ wird durch die Bedingung

$$fg \in \mathfrak{a} \quad \Longrightarrow \quad f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ oder } g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$$

definiert? Wieso ist dies nicht die Klasse der Primärideale?

Aufgabe 2. Sei R ein normaler noetherscher Ring. Verifizieren Sie, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ von Höhe eins der lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ regulär ist.

Aufgabe 3. Sei R ein integer lokaler Ring und $f \neq 0$ aus $\mathfrak{m}_R$. Zeigen Sie, dass der lokale Ring

$$A = R/(f)$$

regulär ist genau dann, wenn R regular und $f \notin \mathfrak{m}_R^2$.

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein echtes Ideal. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a}$ primär ist genau dann, wenn die endliche Menge

$$\mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Spec}(R)$$

nur aus einem Element besteht.

Abgabe: Bis Freitag, den 21. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.