

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei S eine reguläre Fläche und $C = \sum_{i=1}^r m_i C_i$ eine Kurve vom kanonischen Typ mit Kodaira-Symbol I_n^* , II^* , III^* oder IV^* . Verifizieren Sie, dass die Multiplizitäten $m_i \geq 1$ wie in der Vorlesung angegeben sind.

Aufgabe 2. Sei $f : S \rightarrow B$ eine Faserung vom Geschlecht $g = 1$. Für jede abgeschlossene Faser $S_b = f^{-1}(b)$ sei eine irreduzible Komponente $C_b \subset S_b$ ausgewählt, und R_b die Vereinigung der übrigen Komponenten. Zeigen Sie, dass es eine Kontraktion $f : S \rightarrow X$ von der Vereinigung $R = \bigcup R_b$ gibt.

Aufgabe 3. Sei $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ eine Hirzebruch-Fläche mit Invariante $e = 2$. Konstruieren Sie einen birationalen Morphismus $f : X \rightarrow S$ als Folge von Aufblasungen so, dass die Fläche X eine Kurve $C = \sum_{i=1}^r m_i C_i$ vom kanonischen Typ mit Kodaira-Symbol I_4 enthält. Zeigen Sie, dass für ein weiteres $g : Y \rightarrow S$ das Kodaira-Symbol III auftritt.

Aufgabe 4. Sei S eine Fläche mit $K_S^2 = 0$ über dem Körper $k = \mathbb{C}$. Angenommen, die topologische 4-Mannigfaltigkeit $M = S(\mathbb{C})$ ist einfach-zusammenhängend. Folgern sie, dass die zweite Betti-Zahl den Kongruenzen

$$b_2 \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{und} \quad b_2 \equiv 1 \pmod{3}$$

genügt.

Abgabe: Bis Freitag, den 13. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.