

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Drücken Sie die Diskriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ der quadratischen Gleichung

$$(uX - r)(vX - s) = 0$$

als Quadrat durch die Zahlen u, v, r, s aus.

Aufgabe 2. Seien a, b, x, y vier Dinge. Verifizieren Sie, dass die Gleichheit von Mengen

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

genau dann gilt, wenn $a = x$ und $b = y$. Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $a = b$ und $a \neq b$, und beachten Sie, dass zwei Implikationen/Inklusionen zu zeigen sind.

Aufgabe 3. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) Für alle Teilmengen $B, B' \subset Y$ gilt $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
- (ii) Für alle Teilmengen $A, A' \subset X$ gilt $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
- (iii) Für alle $A \subset X$ und $B \subset Y$ gilt $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
- (iv) Die Produktmenge $\emptyset \times Y$ ist für jede Menge Y leer.
- (v) Ist die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ nicht injektiv, so gilt $\text{Card}(X) \geq 2$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ keine rationale Zahl ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24. Oktober um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus didaktischen und urheberrechtlichen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Sprechen* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formeln sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „ A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A , dann B “ sowie „wenn B , dann A “ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A , dann B “ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, folgen Sie bitte der wissenschaftlichen Praxis und schreiben beispielsweise: „Wegen [Vorlesung], Proposition 3.12 gilt...“
10. Alle Abgaben müssen individuell, handschriftlich, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.