Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Welche der fünf Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) \mid x < 0\}\,, \\ U_2 &= \{(x,y,z) \mid xy = z\}\,, \\ U_3 &= \{(x,y,z) \mid 2x + 3y = -z\}\,, \\ U_4 &= \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{Q}\}\,, \\ U_5 &= \{(t, 3t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

des Anschauungsraumes $V = \mathbb{R}^3$ sind reelle Untervektorräume?

Aufgabe 2. (i) Sei $V = \mathbb{C}[T]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome $P(T) = \lambda_n T^n + \ldots + \lambda_0$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{P \mid P(e^{\pi i} T) = P(T) \text{ und } \deg(P) \leqslant 3\}$$

ein Untervektorraum ist.

(ii) Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{f \mid \exists c \geq 0 \text{ mit } f(x) = 0 \text{ falls } |x| \geq c\ \}$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $n \geq 0$. Wir betrachten den Standardvektorraum $V = K^{n+1}$ über dem endlichen Primkörper $K = \mathbb{F}_p$. .

(i) Verifizieren Sie, dass es $p - 1$ nicht-verschwindende Skalare $\lambda \in K$ und $p^{n+1} - 1$ nicht-verschwindende Vektoren $a \in V$ gibt.

(ii) Schließen Sie, dass es $p^n + p^{n-1} + \ldots + p + 1$ Geraden $L \subset V$ gibt, also Untervektorräume der Form $L = Ka$ mit $a \neq 0$.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ zwei Untervektorräume mit $U_1 \not\subset U_2$ und $U_2 \not\subset U_1$. Beweisen Sie, dass die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2 \subset V$ kein Untervektorraum ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.