Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ werden die beiden Vektoren

$$a = (1, -2) \quad \text{und} \quad b_t = (t^2, 3t - 1)$$

in der Anschauungsebene $V = \mathbb{R}^2$ linear abhängig? Betrachten Sie dabei zunächst die Spezialfälle $t = 0$ und $t = 1$.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir fassen die trigonometrischen Funktionen

$$x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad x \longmapsto \sin(x)$$

als Vektoren $\cos, \sin \in V$ auf. Zeigen Sie durch Betrachtung von Nullstellen, dass diese beiden Vektoren linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Sei $K = \mathbb{F}_p$ ein endlicher Primkörper. Wie viele Basen $a_1, \ldots, a_n$ im Standardvektorraum $V = K^n$ gibt es? Betrachten Sie dabei zunächst die Spezialfälle $n = 1$ und $n = 2$. Nutzen Sie für den allgemeinen Fall die Bedingung $a_j \notin \sum_{i<j} Ka_i$ aus.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis. Seien weiterhin $z_1, \ldots, z_n$ komplexe Zahlen, deren Imaginärteile nicht verschwinden. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, z_1a_1, a_2, z_2a_2 \ldots, a_n, z_na_n \in V$$

eine Basis von V bilden, wobei wir nun V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Was besagt das über die Beziehung zwischen $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V)$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.