Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form. Wenden Sie den Algorithmus ein zweites Mal an, wobei Sie zu Beginn ein anderes Pivotelement wählen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 14 & 29 & -30 \\ -1 & 3 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -18 & 16 \\ 5 & -15 & 15 & -33 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus $\mathrm{rank}(A) \geq 0$ sowie eine Basis von $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{Q}^5$.

Aufgabe 3. Finden Sie mit dem Gauß-Algorithmus ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge aus den Bildern $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Q}^3$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -27 & -18 \\ -2 & 4 & -48 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q})$$

besteht.

Aufgabe 4. Sei $A = (n_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen, aufgefasst als Element $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{Q})$. Für jedes Primzahl $p > 0$ sei

$$A_p = ([n_{ij}]) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}_p)$$

die Matrix, deren Einträge die Kongruenzklassen von $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ modulo p sind. Beweisen Sie mithilfe des Gauß-Algorithmus, dass

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_p)$$

für fast alle Primzahlen $p > 0$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.