Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

# Übungen zu Lineare Algebra I

## Blatt 9

**Aufgabe 1.** (i) Sind die Vektoren

$$z_1 = (3, 2, 11), \quad z_2 = (1, 1, 2), \quad z_3 = (9, 8, 6)$$

im Standardvektorraum $(\mathbb{F}_{17})^3$ linear unabhängig?

(ii) Wählen Sie aus den Vektoren

$$x_1 = (1, 3, 1), \quad x_2 = (2, 6, 2), \quad x_3 = (2, 10, 4), \quad x_4 = (0, 2, 1)$$

eine Basis der linearen Hülle $\sum_{i=1}^4 \mathbb{Q}x_i \subset \mathbb{Q}^3$.

(iii) Schreiben Sie den Vektor $c = (1, i, -2) \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$y_1 = (1, 2, 0), \quad y_2 = (3, 8, 4), \quad y_3 = (1, 5, 7).$$

**Aufgabe 2.** Sei $r = \sqrt{2}$. Verifizieren Sie, dass die reelle $3 \times 3$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2r & 2-2r & 3+15r \\ 2 & -2 & 9 \\ 0 & r & 6 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie zwei Einträge des Matrizenprodukts $A \cdot A^{-1}$ explizit ausrechnen.

**Aufgabe 3.** Wir betrachten die komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

Sei $U \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ die Menge aller Matrizen $B$, welche mit $A$ kommutieren.

(i) Verifizieren Sie, dass $U \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ ein Untervektorraum ist, indem Sie die Teilmenge als Kern einer lineare Abbildung deuten.

(ii) Berechnen Sie eine Basis für den Vektorraum $U$.

**Aufgabe 4.** Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, und $r = \operatorname{rank}(f)$. Beweisen Sie, dass es Basen $x_1, \ldots, x_n \in V$ und $y_1, \ldots, y_m \in W$ gibt so, dass die Matrix von $f$ die Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei $E$ die $r \times r$-Einheitsmatrix und die übrigen Blöcke Nullmatrizen sind.

**Abgabe:** Bis Mittwoch, den 19. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.