Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Rechnen Sie explizit nach, dass

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{und} \quad \det(E) = 1.$$

Folgern Sie daraus, dass ähnliche Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ die gleiche Determinante haben.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und λ, μ, α drei Skalare. Rechnen Sie explizit nach, dass die 2×2-Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

niemals ähnlich sind.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathrm{Mat}_n(K)$ die Teilmenge aller symmetrischen Matrizen $A = (\lambda_{ij})$, also $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ für alle Indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

(i) Verifizieren Sie, dass diese Teilmenge ein Untervektorraum ist.

(ii) Bestimmen Sie $\dim_K(U)$, indem Sie eine Basis $A_1, A_2, \ldots$ für U angeben.

Aufgabe 4. Wie definieren auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ eine Relation: Schreibe $A \sim B$ wenn es ein $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt so, dass $B = SAT$.

(i) Verifizieren Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Rangs von Matrizen, dass es genau

$$d = \min(m, n) + 1$$

Äquivalenzklassen gibt, und wählen Sie aus jeder Klasse einen Representanten aus.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 9. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!